აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ლერი ბანცური

მრავალი ცვლადის ფუნქციების დიფერენციალური თვისებების შესახებ

დისერტაცია მათემატიკის დოქტორის
აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
სრული პროფესორი გიორგი ონიანი

ქუთაისი
2012

სარჩევი

შესავალი

ერთი და მრავალი ცვლადის ფუნქციების დიფერენციალური თვისებების შესწავლა ნამდვილი ანალიზის ერთერთი ძირითადი საკითხია, რომელსაც აქვს სხვადასხვა ასპექტები იმისდა მიხედვით თუ როგორი ტიპის ფუნქცია და როგორი ტიპის დიფერენცირება განიხილება. ამ მიმართებით განსაკუთრებული აქცენტით შეისწავლებოდა ამათუიმ აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასები. ლებეგის კლასიკური შედეგი ერთი ცვლადის სასრული ვარიაციის ფუნქციის თითქმის ყველგან დიფერენცირებადობის შესახებ გახდა ამოსავალი წერტილი საკუთრივ ლებეგის, ზიგმუნდის, საქსის, ბუზემანისა და ფელერის, ბერკილისა და ჰასლამ-ჯონსის, სტეპანოვის, კრონროდის, ვიტუშკინის და სხვათა საინტერესო გამოკვლევებისა, რომელთა მიზანი იყო სხვადასხვა შესაძლო დასმით ლებეგის აღნიშნული შედეგის მრავალგანზომილებიანი განზოგადების, ანაც განზოგადების შეუძლებლობის დადგენა. ამ მიმართულებით სადღეისოდ მიღებული შედეგების შესახებ წარმოდგენა შეიძლება შევიქმნათ საქსის [Sa1], დე გუსმანის [Gu], ვიტუშკინის [Vi], ონიანის [O1] მონოგრაფიებითა და ზერეკიძისა [Ze] და სტოკოლოსის [Sk] შრომებით.

არსებობს დიფერენცირების(გაწარმოების) სხვადასხვა განმარტება (იხ. მაგ. [Sa1], [Gu],[Sn],[Br],[Mu]), რომლებიც წარმოადგენენ ორი კლასიკური განმარტების ვარიაციებს: პირველი - ჩვეულებრივი დიფერენცირება (რაც გულისხმობს წრფივი ასახვით ფუნქციის ლოკალური მიახლოების შესაძლებლობას); მეორე - ბეტაცის აზრით წარმოებული, რომელიც წარმოადგენს n-განზომილებიან ინტერვალზე ფუნქციის შერეული სხვაობის(ან ინტერვალის ფუნქციის მნიშვნელობის) ამავე ინტერვალის მოცულობასთან ფარდობის ზღვარს. ძაგნიძის [Dz1] მიერ შემოთავაზებული იქნა გრადიენტის კლასიკური ცნების განზოგადება და მისი გამოყენებით დადგენილი იქნა მრავალი ცვლადის ფუნქციების რიგი საინტერესო სტრუქტურული თვისებებისა. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები თავმოყრილია [Dz2] და [Dz3] მონოგრაფიებში.

წინამდებარე ნაშრომის მიზანია: სასრული ვარიაციის მქონე ინტერვალის ადიციურ ფუნქციათა ძლიერი საშუალოების განშლადობის მახასიათებლების შესწავლა; ჰარდისა და არცელას აზრით სასრული ვარიაციის მქონე მრავალი ცვლადის ფუნქციების

დიფერენციალური თვისებების გამოკვლევა ძლიერი გრადიენტის არსებობის თვალსაზრისით; ბაზისის მიმართ გრადიენტის არსებობის პირობის შედარება დიფერენცირებადობის პირობასთან წერტილოვნად და დადებითი ზომის სიმრავლეებზე.

დისერტაცია შედგება შესავლისა და ორი თავისაგან.

პირველ თავში შესწავლილია შემდეგი სამი ტიპის ფუნქციების დიფერენციალური თვისებები: სასრული ვარიაციის ინტერვალის ადიციური ფუნქციები; ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციები; არცელას აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციები.

პირველ და მეორე პარაგრაფებში მოცემულია აუცილებელი ცნობები მრავალი ცვლადის სხვადასხვა ტიპის სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციების შესახებ.

მესამე პარაგრაფში დადგენილია სასრული ვარიაციის მქონე ინტერვალის ადიციური ფუნქციის ძლიერი საშუალოების განშლადობის რიგის ზუსტი შეფასება.

ვთქვათ F ყველა n-განზომილებიანი ინტერვალის კლასზე განსაზღვრული ფუნქციაა (მოკლედ: ინტერვალის ფუნქცია). F ფუნქციას ეწოდება ადიციური, თუ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ინტერვალების ნებისმიერი $I_1,\dots,I_m$ ოჯახისათვის, რომელთა გაერთიანება არის რაიმე I ინტერვალი, სრულდება ტოლობა $F(I)=\sum_{k=1}^{m}F(I_k)$.

I ინტერვალის დანაწილება ეწოდება წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ინტერვალების სასრულ ოჯახს, რომლის გაერთიანება არის I. Π_I -თი აღვნიშნოთ I ინტერვალის ყველა შესაძლო დანაწილების ოჯახი.

ინტერვალის F ფუნქციას ეწოდება I ინტერვალზე სასრული ვარიაციის მქონე, თუ

$$V_I(F)=\sup_{P\in\Pi_I}\sum_{J\in P}|F(J)|<\infty.$$

F ეწოდება სასრული ვარიაციის $\mathbb{R}^n$-ზე, თუ $V_I(F)$ სიდიდეების სუპრემუმი, აღებული ყველა შესაძლო I ინტერვალის მიხედვით, არის სასრული. ხსენებული სუპრემუმი აღვნიშნოთ $V(F)$ -ით. $\mathbb{R}^n$ -ზე სასრული ვარიაციის მქონე ყველა ინტერვალის ადიციური ფუნქციის კლასი აღვნიშნოთ $V(\mathbb{R}^n)$ -ით.

$x\in\mathbb{R}^n$ წერტილისათვის $\mathbb{I}(x)$ -ით აღვნიშნოთ ყველა n-განზომილებიანი I ინტერვალის ოჯახი, რომელიც შეიცავს x წერტილს.

n -განზომილებიანი $I=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ ინტერვალისათვის აღვნიშნოთ

$$l_k(I)=b_k-a_k \quad (k\in\overline{1,n}).$$

$w:(0,1)^{n-1}\to(0,\infty)$ ფუნქციას, რომელიც კლებადია თითოეული ცვლადის მიმართ ვუწოდოთ წონა.

ვიტყვით, რომ w წონა აკმაყოფილებს (K) პირობას, თუ

$$\int\limits_{(0,1)^{n-1}} \frac{dt_1\cdots dt_{n-1}}{t_1\cdots t_{n-1}w(t_1,\ldots,t_{n-1})}<\infty.$$

შენიშვნა 1.3.1. (K) პირობას აკმაყოფილებენ

$$\left(\ln\frac{1}{t_1}\cdot\ln\frac{1}{t_2}\cdot\cdots\cdot\ln\frac{1}{t_{n-1}}\right)^{1+\varepsilon} \qquad \left(n\geq 2,\ \varepsilon>0\right)$$

სახის ფუნქციები და არ აკმაყოფილებს

$$\ln\frac{1}{t_1}\cdot\ln\frac{1}{t_2}\cdot\cdots\cdot\ln\frac{1}{t_{n-1}}$$

ფუნქცია. ანალოგიური შეიძლება ითქვას უფრო ზოგადი სახის

$$w_{n,k,\varepsilon}\left(t_1,\cdots,t_{n-1}\right)=\prod_{i=1}^{n-1}\left[\ln\frac{1}{t_i}\cdot\ln\ln\frac{1}{t_i}\cdot\cdots\cdot\left(\overbrace{\ln\ln\cdots\ln}^{k-\text{jer}}\frac{1}{t_i}\right)^{1+\varepsilon}\right]$$

ფუნქციებზე, შესაბამისად $\varepsilon>0$ და $\varepsilon=0$ შემთხვევებში. ამრიგად, $n=2$ შემთხვევაში, (K) პირობას აკმაყოფილებენ $\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}$ $\left(\varepsilon>0\right)$ სახის ფუნქციები და არ აკმაყოფილებს $\ln\frac{1}{t}$ ფუნქცია.

P_n -ით აღვნიშნოთ $\{1,\ldots,n\}$ სიმრავლის ყველა გადანაცვლების კლასი.

ვთქვათ w წონაა, $f\in L(\mathbb{R}^n), F\in V(\mathbb{R}^n)$ და $x\in\mathbb{R}^n$. აღვნიშნოთ

$$M_w(f)(x)=\sup_{I\in\mathbb{I}(x),diamI<1}\ \max_{p\in P_n}\frac{1}{|I|\,w(l_{p(1)}(I),\ldots,l_{p(n-1)}(I))}\int_I|f|;$$

$$T_w(F)(x)=\sup_{I\in\mathbb{I}(x),diamI<1}\ \max_{p\in P_n}\frac{V_I(F)}{|I|\,w(l_{p(1)}(I),\ldots,l_{p(n-1)}(I))}.$$

$c(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$-ით აღნიშნულია მხოლოდ $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ პარამეტრებზე დამოკიდებული დადებითი მუდმივები.

ს. საქსმა [Sa2] და ჰ. ბუზემანმა და ვ. ფელერმა [BF] ააგეს მაგალითი $f\in L(\mathbb{R}^n), f\ge 0,$ ფუნქციისა, რომლის ძლიერი ინტეგრალური საშუალოები შემოუსაზღვრელად განშლადია ყოველ წერტილში, კერძოდ, ყოველი $x\in\mathbb{R}^n$ წერტილისათვის

$$\limsup_{I\in\mathbb{I}(x),diamI\to 0}\frac{1}{|I|}\int_I f=\infty.$$

აქვე შევნიშნავთ, რომ ყველაზე ფართო ინტეგრალური კლასი, რომელშიც უზრუნველყოფილია ძლიერი ინტეგრალური საშუალოების თითქმის ყველგან კრებადობა არის $L(1+\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ (იხ. [JMZ] და [Sa3]).

გ. კარაგულიანმა [Ka] დაადგინა ძლიერი ინტეგრალური საშუალოების განშლადობის რიგის ზუსტი შეფასება. კერძოდ, დაამტკიცა შემდეგი

თეორემა 1.3.A. *თუ* w *წონა აკმაყოფილებს* (K) პირობას, *მაშინ ყოველი* $f\in L(\mathbb{R}^n)$ *ფუნქციისათვის თითქმის ყოველ* $x\in\mathbb{R}^n$ *წერტილში სრულდება შეფასება*

$$\frac{1}{|I|}\int_I f=o[\min_{p\in P_n} w(l_{p(1)}(I),\dots,l_{p(n-1)}(I))\,],\ \text{როცა}\ I\in\mathbb{I}(x),\ diamI\to 0.$$

გარდა ამისა, M_w *ოპერატორი არის სუსტი* $(1,1)$ *ტიპის, ე.ი.*

$$|\{M_w(f)>\lambda\}|\le\frac{c(w,n)}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f|\quad (f\in L(\mathbb{R}^n),\quad \lambda>0).;$$

ხოლო იმ შემთხვევაში თუ w *წონა არ აკმაყოფილებს* (K) *პირობას, მაშინ არსებობს* $f\in L(\mathbb{R}^n)$, $f\ge 0,$ *ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი* $x\in\mathbb{R}^n$ *წერტილისათვის*

$$\limsup_{I\in\mathbb{I}(x),diamI\to 0}\frac{1}{|I|\,w(l_1(I),\dots,l_{n-1}(I))}\int_I f=\infty.$$

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ თეორემა 1.3.A-ს დასკვნა სამართლიანია უფრო ზოგად სიტუაციაში, კერძოდ, ის სრულდება სასრული ვარიაციის მქონე სეგმენტის ადიციური ფუნქციების ძლიერი საშუალოებისათვის.

თეორემა 1.3.1. *თუ* w *წონა აკმაყოფილებს* (K) *პირობას, მაშინ ყოველი* $F\in V(\mathbb{R}^n)$ *ფუნქციისათვის თითქმის ყოველ* $x\in\mathbb{R}^n$ *წერტილში სრულდება შეფასება*

$$\frac{F(I)}{|I|} = o[\min_{p\in P_n} w(l_{p(1)}(I),\dots,l_{p(n-1)}(I))\,],\ \ roca\ \ I \in \mathbb{I}(x),\ diamI \to 0.$$

გარდა ამისა,

$$|\{T_w(F) > \lambda\}| \le \frac{c(w,n)}{\lambda} V(F) \quad (F \in V(\mathbb{R}^n),\ \ \lambda > 0).$$

შენიშვნა 1.3.3. ვთქვათ w არის წონა, რომელიც არ აკმაყოფილებს (K) პირობას, და ვთქვათ f არის ფუნქცია თეორემა 1.3.A-ს მეორე ნაწილიდან, რომელიც შეესაბამება w წონას. თუ f -ის განუსაზღვრელ ინტეგრალს განვიხილავთ როგორც ინტერვალის ფუნქციას, ე.ი., თუ განვიხილავთ $F(I) = \int_I f$ ტოლობით განსაზღვრულ ინტერვალის F ფუნქციას, სადაც I ნებისმიერი n -განზომილებიანი ინტერვალია, დავასკვნით თეორემა 1.3.1-ში მოცემული შეფასების სიზუსტეს.

შენიშვნა 1.3.4. თეორემა 1.3.1 არსებით გამოყენებას პოულობს მომდევნო პარაგრაფში, ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციათა დიფერენციალური თვისებების შესწავლისას.

მეოთხე და მეხუთე პარაგრაფებში დადგენილია, რომ ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციას თითქმის ყველგან აქვს ძლიერი გრადიენტი, ხოლო არცელას აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციებს არა აქვთ ანალოგიური თვისება.

მოვიყვანოთ საჭირო განმარტებები და ცნობები ჰარდისა და არცელას აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციების, ასევე ძლიერი გრადიენტის ცნების, შესახებ.

ვთქვათ $x, y \in \mathbb{R}^n$ და $x \le y$ (ე.ი., $x_i \le y_i$ ყოველი $i \in \overline{1,n}$ -თვის). I_x^y -ით აღვნიშნოთ $\prod_{i=1}^n [x_i, y_i]$ ინტერვალი.

$f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციის შერეული სხვაობა $I = I_x^y \subset [0,1]^n$ ინტერვალზე ეწოდება გამოსახულებას

$$\Delta(f,I) = \sum_{\varepsilon_1=0}^{1} \cdots \sum_{\varepsilon_n=0}^{1} (-1)^{n-\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} f(x_1+\varepsilon_1(y_1-x_1),\dots,x_n+\varepsilon_n(y_n-x_n)).$$

ვთქვათ Π არის $[0,1]^n$ -ის ყველა შესაძლო დანაწილებების ოჯახი.

$f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება სასრული ვარიაციის ვიტალის აზრით, თუ

$$\sup_{P\in\Pi}\sum_{I\in P}|\Delta(f,I)|<\infty.$$

$\mathbb{V}_n$ -ით აღვნიშნოთ $[0,1]^n$ -ზე განსაზღვრული ვიტალის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ყველა ფუნქციის კლასი.

$|B|$ -ით აღვნიშნოთ $B\subset\overline{1,n}$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა.

ვთქვათ $B\subset\overline{1,n}$, $0<|B|<n, t\in[0,1]^{n-|B|}$ და $\tau\in[0,1]^{|B|}$. (t,τ,B) -თი აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^n$ სივრცის ის წერტილი, რომლისთვისაც $(t,\tau,B)_i=t_{|\overline{1,i}\setminus B|}$, როცა $i\notin B$ და $(t,\tau,B)_i=\tau_{|\overline{1,i}\cap B|}$, როცა $i\in B$.

ვთქვათ f რაიმე ფუნქციაა $[0,1]^n$ -ზე. $B\subset\overline{1,n}$, $0<|B|<n,$ სიმრავლისათვის და $t\in[0,1]^{n-|B|}$ წერტილისათვის $f_{B,t}$ -თი აღვნიშნოთ $[0,1]^{|B|}$ -ზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია

$$f_{B,t}(\tau)=f((t,\tau,B))\ \ (\tau\in[0,1]^{|B|}).$$

$f_{B,t}$ შეიძლება განხილული იქნას, როგორც f ფუნქციის $(B,t)-$ კვეთა. აღვნიშნოთ აგრეთვე $f_B=f_{B,0}$, სადაც 0 არის $\mathbb{R}^{n-|B|}$ სივრცის ნულოვანი ელემენტი. ცხადია, რომ $f_{\overline{1,n}}=f$.

$f:[0,1]^n\to\mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის, თუ f ფუნქცია მის ყოველ კვეთასთან ერთად არის ვიტალის აზრით სასრული ვარიაციის, ე.ი., $f\in\mathbb{V}_n$ და $f_{B,t}\in\mathbb{V}_{|B|}$ ყოველი $B\subset\overline{1,n},$ $0<|B|<n,$ სიმრავლისათვის და ყოველი $t\in[0,1]^{n-|B|}$ წერტილისათვის.

$[0,1]^n$ -ზე განსაზღვრული ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციების კლასი აღვნიშნოთ $\mathbb{H}_n$ -ით.

ლეონოვმა [Le] დაადგინა, რომ ჰარდის აზრით ვარიაციის სასრულობის შესამოწმებლად ყველა შესაძლო კვეთის ნაცვლად საკმარისია განხილული იქნას მხოლოდ „სტანდარტული" f_B კვეთები. სახელდობრ, ლეონოვმა დაამტკიცა, რომ

$$f\in\mathbb{H}_n\Leftrightarrow f_B\in\mathbb{V}_{|B|}\quad(B\subset\overline{1,n}, B\neq\varnothing).$$

გავიხსენოთ, რომ $f\in L[0,1]^n$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი ეწოდება ფუნქციას

$$F_f(x) = \int\limits_{[0,x_1]\times\cdots\times[0,x_n]} f(y)dy \qquad (x \in [0,1]^n).$$

ლეონოვის ზემოაღნიშნული შედეგიდან გამომდინარე მარტივად ვრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი არის ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქცია.

$f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი, თუ $\Delta(f, I_x^y) \geq 0$ ყოველი $x, y \in [0,1]^n$, $x \leq y$, წერტილებისათვის.

$\mathbb{M}_n$ -თი აღვნიშნოთ ყველა ზრდადი $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციის კლასი. ცხადია, რომ $\mathbb{M}_n \subset \mathbb{H}_n$.

ცნობილია, რომ ზრდადი ფუნქცია თითქმის ყველგან უწყვეტია (იხ. [YY]) და შედეგად, არის ზომადი.

ცნობილია აგრეთვე, რომ (იხ. მაგ. [AC]) ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქცია შეიძლება წარმოდგეს როგორც ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობა.

$f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება სასრული ვარიაციის არცელას აზრით, თუ შემდეგი სახის ჯამების სიმრავლე

$$\sum_{k=1}^{m-1} | f(x_{k+1}) - f(x_k) |,$$

სადაც $m \in \mathbb{N}$ და $(0,\ldots,0) = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m = (1,\ldots,1)$, არის შემოსაზღვრული.

შევნიშნოთ, რომ ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ყოველი ფუნქცია არის სასრული ვარიაციის არცელას აზრითაც (იხ. მაგ. [AC] და [Ho]).

$h \in \mathbb{R}^n$ ვექტორისათვის $h(i)$ $(i \in \overline{1,n})$ იყოს შემდეგი სახის ვექტორი: $h(i)_i = 0$ და $h(i)_j = h_j$ თუ $j \in \overline{1,n} \setminus \{i\}$. L_i -ით ($i \in \overline{1,n}$) აღვნიშნოთ $\{h \in \mathbb{R} : h_i = 0\}$ ჰიპერსიბრტყე.

ვთქვათ f არის $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრული ფუნქცია. თუ $i \in \overline{1,n}$ ინდექსისათვის არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\mathbb{R}^n \setminus L_i \ni h \to 0} \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x + h\left(i\right)\right)}{h_i}$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება f ფუნქციის i -ური ძლიერი კერძო წარმოებული x წერტილში და აღინიშნება სიმბოლოთი $D_{[i]}f(x)$. თუ f ფუნქციას აქვს სასრული $D_{[i]}f(x)$ ყოველი $i \in \overline{1,n}$ ინდექსისათვის, მაშინ ამბობენ, რომ f ფუნქციას აქვს ძლიერი გრადიენტი x წერტილში.

ძლიერი გრადიენტის ცნება შემოღებული იქნა ო. ძაგნიძის [Dz1] მიერ ლებეგის ჯერადი განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენციალური თვისებების შესწავლასთან დაკავშირებით.

როგორც ცნობილია, წერტილში ჩვეულებრივი გრადიენტის, ანუ ჩვეულებრივი კერძო წარმოებულების, არსებობა არ იწვევს ფუნქციის დიფერენცირებადობას. განსხვავებით ჩვეულებრივი გრადიენტისაგან, ძლიერი გრადიენტი იძლევა უფრო ძლიერ პირობას ვიდრე დიფერენცირებადობაა. კერძოდ, ო. ძაგნიძემ [Dz1] დაადგინა, რომ: თუ ფუნქციას წერტილში აქვს ძლიერი გრადიენტი, მაშინ ის დიფერენცირებადია ამავე წერტილში; ხოლო შებრუნებული იმპლიკაცია საზოგადოდ სამართლიანი არაა, სახელდობრ, ფუნქცია $f\left(x_1, x_2\right) = \left|x_1 x_2\right|^{2/3}$ დიფერენცირებადია 0 წერტილში, მაგრამ არა აქვს ძლიერი გრადიენტი ამავე წერტილში.

ამრიგად, ფიქსირებულ წერტილში დიფერენცირებადობის პირობა უფრო სუსტია ვიდრე ძლიერი გრადიენტის არსებობის პირობა. საინტერესოა რა ხდება დადებითი ზომის სიმრავლეებზე ამ პირობების შედარებისას? საკითხის ასეთი დასმა საინტერესო ხდება თუ გავითვალისწინებთ, რომ რაიმე (A) პირობის რაიმე (B) პირობასთან შედარებით წერტილოვნად სისუსტის ეფექტი შეიძლება სულაც არ ვრცელდებოდეს დადებითი ზომის სიმრავლეებზე: მაგალითისათვის საკმარისია მოვიტანოთ მარჯვნიდან დიფერენცირებადობის და ორმხრივად დიფერენცირებადობის პირობები, რომლელთა შორის პირველი წერტილოვნად სუსტია მეორეზე, მაგრამ დანჟუას ცნობილი თეორემის ძალით(იხ. მაგ. [Sa1, თ. მე-9, §4]) თუ ფუნქცია მარჯვნიდან დიფერენცირებადია რაიმე სიმრავლეზე, მაშინ ის ორმხრივად დიფერენცირებადია იგივე სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილში). ასეთ შემთხვევაში, იმ საკითხებში, სადაც მნიშვნელოვანია პირობის შესრულება თითქმის ყველგან, (B) პირობა არანაირ უპირატესობას არ იძლევა (A) პირობასთან შედარებით.

(A) პირობას ვუწოდოთ არსებითად უფრო ძლიერი (B) პირობასთან შედარებით (ან კიდევ, (B) ვუწოდოთ არსებითად უფრო სუსტი (A) პირობასთან შედარებით), თუ : 1) (A)-ს შესრულება ფიქსირებულ წერტილში იწვევს (B)-ს შესრულებას ამავე წერტილში; და 2) არსებობს ფუნქცია, რომლისთვისაც (B) შესრულებულია დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლის თითოეულ წერტილში, მაგრამ (A) არაა შესრულებული იგივე სიმრავლის არცერთ წერტილში.

ახლა კითხვა შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: არის თუ არა ძლიერი გრადიენტის არსებობის პირობა არსებითად უფრო ძლიერი ვიდრე დიფერენცირებადობის პირობა?

ამ კითხვაზე დადებითი პასუხი გაცემული იქნა გ.გ. ონიანის [O2] მიერ, შემდეგი თეორემის სახით.

თეორემა 1.2.A. *ყოველი $n \ge 2$ -თვის არსებობს უწყვეტი ფუნქცია $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ისეთი, რომ:*

1. *f დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან ,*
2. $\overline{\lim\limits_{\mathbb{R}^n \setminus L_1 \ni h \to 0}} \dfrac{f(x+h) - f(x+h(1))}{h_1} = \infty$ *თითქმის ყველგან და შედეგად, f -ს თითქმის არსად არა აქვს ძლიერი გრადიენტი.*

ახლა გადავიდეთ მეოთხე და მეხუთე პარაგრაფებში დადგენილი დებულებების მიმოხილვაზე.

მრავალი ცვლადის სასრული ვარიაციის ფუნქციათა დიფერენციალური თვისებები შეისწავლებოდა სხვადასხვა ავტორის მიერ. ბერკილისა და ჰასლამ-ჯონსის [BH] მიერ დამტკიცებული იყო შემდეგი

თეორემა 1.4.A. *არცელას აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ნებისმიერი $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან. შედეგად, ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ნებისმიერი $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან.*

ცნობილია აგრეთვე, რომ: $[0,1]^n$ -ზე განსაზღვრული, კრონროდ-ვიტუშკინის აზრით სასრული ვარიაციის ნებისმიერი ფუნქცია თითქმის ყველგან დიფერენცირებადია (კრონროდი [Kr]-ორგანზომილებიანი შემთხვევა; ვიტუშკინი [Vi] - ნებისმიერი განზომილებისათვის); არსებობს ტონელის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქცია $[0,1]^2$ -ზე, რომელიც არსად არაა დიფერენცირებადი (სტეპანოვი [St]), აქვე აღვნიშნავთ, რომ მარტივი შესამოწმებელია ანალოგიური დებულების სამართლიანობა ვიტალის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციებისათვის.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ნებისმიერი $f \in L[0,1]^n$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი არის ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქცია, რისი

გათვალისწინებით და თეორემა 1.4.A-ს ძალით ვასკვნით ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის თითქმის ყველგან დიფერენცირებადობას. ო.ძაგნიძის [Dz1] მიერ (ორგანზომილებიან შემთხვევაში) და ო.ძაგნიძისა და გ.გ.ონიანის [DO] მიერ (ნებისმიერი განზომილებისათვის) დადგენილი იქნა, რომ ლებეგის განუსაზღვრელ ინტეგრალს აქვს უფრო ძლიერი დიფერენციალური თვისება, კერძოდ, მას აქვს ძლიერი გრადიენტი თითქმის ყველგან.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: აქვს თუ არა ჰარდის (არცელას) აზრით სასრული ვარიაციის ნებისმიერ ფუნქციას ძლიერი გრადიენტი თითქმის ყველგან?

შემდეგი თეორემები იძლევიან პასუხს დასმულ კითხვაზე.

თეორემა 1.4.1. *ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ნებისმიერ* $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ *ფუნქციას აქვს ძლიერი გრადიენტი თითქმის ყველგან.*

შენიშვნა 1.4.2. თეორემა 1.4.1-ის დამტკიცებისას არსებითად გამოიყენება თეორემა 1.3.1.

თეორემა 1.5.1. *ნებისმიერი* $n \geq 2$ *-თვის არსებობს არცელას აზრით სასრული ვარიაციის მქონე უწყვეტი ფუნქცია* $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$, *რომელსაც არც ერთ წერტილში არა აქვს ძლიერი გრადიენტი.*

თუ გავითვალისწინებთ, რომ არცელას აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ნებისმიერი ფუნქცია თითქმის ყველგან დიფერენცირებადია (იხ. თეორემა 1.4.A), თეორემა 1.5.1-დან მივიღებთ თეორემა 1.2.A-ს შემდეგ გაძლიერებას.

თეორემა 1.5.2. *ნებისმიერი* $n \geq 2$ *-თვის არსებობს უწყვეტი ფუნქცია* $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$, *რომელიც თითქმის ყველა წერტილში დიფერენცირებადია, მაგრამ არც ერთ წერტილში არა აქვს ძლიერი გრადიენტი.*

მეორე თავში შეისწავლება ბაზისის მიმართ განზოგადებული გრადიენტის არსებობისა და დიფერენცირებადობის პირობების შედარების საკითხი.

პირველ პარაგრაფში შემოღებულია ბაზისის მიმართ განზოგადებული გრადიენტის ცნება და მიმოხილულია ამ ცნებასთან დაკავშირებული ცნობილი შედეგები და ამოცანები.

$\Pi_i \ \left(i\in\overline{1,n}\right)$ -თი აღვნიშნოთ ყველა $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ სიმრავლის კლასი, რომელსაც აქვს თვისებები: $\Delta\bigcap L_i=\varnothing$ და კოორდინატთა სათავე 0 არის Δ სიმრავლის ზღვარითი წერტილი.

ვთქვათ $i\in\overline{1,n}$, $\Delta\in\Pi_i$ და f არის $x\in\mathbb{R}^n$ წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრული ფუნქცია. ზღვარს

$$\lim_{\Delta\ni h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x+h\left(i\right)\right)}{h_i},$$

მისი არსებობის შემთხვევაში, ვუწოდოთ f ფუნქციის $\left(i,\Delta\right)$-კერძო წარმოებული x წერტილში და იგი აღვნიშნოთ $D_{i,\Delta}f\left(x\right)$ სიმბოლოთი.

განზოგადებული გრადიენტის წარმომქმნელი ბაზისი (მოკლედ, ბაზისი) ვუწოდოთ n-ეულს $\Delta=\left(\Delta_1,\cdots,\Delta_n\right)$, სადაც $\Delta_i\in\Pi_i$ ყოველი $i\in\overline{1,n}$ -თვის.

თუ $\Delta=\left(\Delta_1,\cdots,\Delta_n\right)$ ბაზისისათვის f ფუნქციას ყოველი $i\in\overline{1,n}$ ინდექსისათვის აქვს $\left(i,\Delta_i\right)$-წარმოებული x წერტილში, მაშინ ვიტყვით, რომ f ფუნქციას x წერტილში აქვს განზოგადებული გრადიენტი Δ ბაზისის მიმართ(მოკლედ, აქვს Δ-გრადიენტი).

ბაზისის მიმართ განზოგადებული გრადიენტის ცნება წარმოადგენს ო. ძაგნიძის [Dz1] მიერ შემოღებული ძლიერი და კუთხური გრადიენტების ცნებათა უშუალო განზოგადებას.

მოკლედ მიმოვიხილოთ ბაზისების ცნობილი მაგალითები და მათი თვისებები. ამ მიმართულებით საკმაოდ ამომწურავი ინფორმაცია მოცემულია ო. ძაგნიძის [Dz2] და [Dz3] მონოგრაფიებში.

$0\le\alpha<\pi/2$ კუთხისათვის $\Delta\left(\alpha\right)$ -თი აღვნიშნოთ α გაშლის კუთხეებით წარმოქმნილი ბაზისი, სახელდობრ ბაზისი, რომლისთვისაც

$$\Delta\left(\alpha\right)_i=\left\{h\in\mathbb{R}^n:\frac{\max\limits_{j\neq i}\left|h_j\right|}{\left|h_i\right|}\le tg\alpha\right\}\quad\left(i\in\overline{1,n}\right).$$

ცხადია, $\alpha=0$ შემთხვევაში $\Delta\left(0\right)$ გვაძლევს $\left(Ox_1\setminus\left\{0\right\},\cdots,Ox_n\setminus\left\{0\right\}\right)$ n-ეულს.

$\alpha = \pi/2$ შემთხვევაში $\Delta(\pi/2)$ ბაზისი განისაზღვრება როგორც $\left(\mathbb{R}^n \setminus L_1, \cdots, \mathbb{R}^n \setminus L_n\right)$ n-ეული.

$\Delta(\alpha)$ ბაზისებს შორის ცალცალკე გამოვყოთ „საწყისი“ - $\Delta(0)$, „შუალედური“- $\Delta(\alpha)$ $(0<\alpha<\pi/2)$ და „საბოლოო“ - $\Delta(\pi/2)$შემთხვევები.

შევნიშნოთ, რომ: $\Delta(0)$ ბაზისი წარმოქმნის ჩვეულებრივ გრადიენტს, ანუ ჩვეულებრივი კერძო წარმოებულების არსებობის პირობას; ხოლო $\Delta(\pi/2)$ გრადიენტი კი წარმოადგენს ძლიერ გრადიენტს.

სხვა რა არის ცნობილი $\Delta(\alpha)$ ბაზისების შესახებ? შევნიშნავთ, რომ ჩვენ უპირველესად დაინტერესებული ვართ $\Delta(\alpha)$-გრადიენტისა და დიფერენცირებადობის პირობების ურთიერთმიმართებით. ამ მიმართულებით ცნობილია შემდეგი საინტერესო შედეგები:

1) $\Delta(0)$ *-გრადიენტის (ანუ ჩვეულებრივი გრადიენტის) არსებობის პირობა არსებითად უფრო სუსტია ვიდრე დიფერენცირებადობის პირობა* (ტოლსტოვი [To,§4]);
2) $\Delta(\alpha)$ *-გრადიენტის არსებობის პირობა ტოლფასია დიფერენცირებადობის პირობის* $\frac{\pi}{4} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ *კუთხეებისათვის* (ო. ძაგნიძე [Dz1]);
3) $\Delta(\pi/2)$*-გრადიენტის (ანუ ძლიერი გრადიენტის) არსებობის პირობა არსებითად უფრო ძლიერია ვიდრე დიფერენცირებადობის პირობა* (გ.გ.ონიანი [O2], იხ. თეორემა 1.2. A).

ამრიგად, ზღვრულ - $\Delta(0)$ და $\Delta(\pi/2)$ შემთხვევებში, ვღებულობთ, შესაბამისად, არსებითად უფრო სუსტ და არსებითად უფრო ძლიერ პირობებს ვიდრე დიფერენცირებადობაა; ხოლო შუალედურ შემთხვევათა „მეორე ნახევარი“ - $\Delta(\alpha)$ $(\pi/4 \le \alpha < \pi/2)$ ბაზისები, იძლევიან დიფერენცირებადობის ტოლფას პირობას.

ვთქვათ $\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_2)$ რაიმე ბაზისია. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც არსებობს f-ის $\Delta-$გრადიენტი, აღვნიშნოთ $E_\Delta(f)$-ით, ხოლო ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f ფუნქცია დიფერენცირებადია, აღვნიშნოთ $E_D(f)$-ით.

აღვნიშნოთ აგრეთვე:

$$\|h\| = \max\{|h_1|,...,|h_n|\} \ \left(h \in \mathbb{R}^n\right),$$

$$\mathrm{I}(r) = \left\{h \in \mathbb{R}^n : h \neq 0, \|h\| < r\right\} \ (r > 0),$$

$$\mathrm{I}(x,r) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\right\} \ \left(x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0\right),$$

$$\overline{M} = M \bigcup \partial M \quad \left(M \subset \mathbb{R}^n\right).$$

$\Delta = (\Delta_1,...,\Delta_n)$ ბაზისს ვუწოდოთ რეგულარული, თუ არსებობს $r > 0$ და $0 < \alpha < \pi/2$ ისეთები, რომ $\Delta_1 \bigcap \mathrm{I}(r) \subset \Delta(\alpha)_1$,....... . ..., $\Delta_n \bigcap \mathrm{I}(r) \subset \Delta(\alpha)_n$.

$\Delta = (\Delta_1,...,\Delta_n)$ ბაზისს ვუწოდოთ სრული, თუ არსებობს $r > 0$ ისეთი, რომ $\mathrm{I}(r) \subset \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n$.

$\Delta = (\Delta_1,...,\Delta_n)$ ბაზისისათვის $\overline{\Delta}$ -ით აღვნიშნოთ მისი “ჩაკეტვა” - $\overline{\Delta} = \left(\overline{\Delta}_1 \setminus L_1,...,\overline{\Delta}_n \setminus L_n\right)$ ბაზისი.

მეორე პარაგრაფში შეისწავლება საკითხი: ვთქვათ $\Delta = (\Delta_1,...,\Delta_n)$ რაიმე ბაზისია. როდისაა Δ -გრადიენტის არსებობის პირობა დიფერენცირებადობის პირობის ტოლფასი? საზოგადოდ, რა მიმართებაშია ერთმანეთთან ფიქსირებულ წერტილში Δ -გრადიენტის არსებობისა და დიფერენცირებადობის პირობები?

ქვემოთ მოყვანილი თეორემები იძლევიან დასმული საკითხის სრულ გადაწყვეტას როგორც ნებისმიერი, ასევე უწყვეტი, ფუნქციების კლასისათვის.

თეორემა 2.2.1. *იმისათვის, რომ Δ -გრადიენტის არსებობა იწვევდეს დიფერენცირებადობას (ანუ ყოველი $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის სრულდებოდეს პირობა $E_\Delta(f) \subset E_D(f)$) აუცილებელი და საკმარისია, რომ Δ იყოს სრული.*

თეორემა 2.2.2. *იმისათვის, რომ ყოველი უწყვეტი ფუნქციისათვის Δ -გრადიენტის არსებობა იწვევდეს დიფერენცირებადობას (ანუ ყოველი უწყვეტი $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის სრულდებოდეს პირობა $E_\Delta(f) \subset E_D(f)$) აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\overline{\Delta}$ იყოს სრული.*

თეორემა 2.2.3. *თუ Δ რეგულარულია, მაშინ დიფერენცირებადობა იწვევს Δ -გრადიენტის არსებობას (ანუ ყოველი $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ -თვის სრულდება პირობა $E_D(f) \subset E_\Delta(f)$).*

თეორემა 2.2.4. *თუ Δ არარეგულარულია, მაშინ დიფერენცირებადობა არ იწვევს Δ -გრადიენტის არსებობას, უფრო მეტიც, არსებობს უწყვეტი ფუნქცია $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ისეთი, რომ $E_D\left(f\right)\setminus E_\Delta\left(f\right)\neq\varnothing$.*

აღნიშნული თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულებები.

შედეგი 2.2.1. *იმისათვის, რომ Δ -გრადიენტის არსებობის პირობა დიფერენცი-რებადობის პირობის ტოლფასი იყოს (ე.ი. ყოველი $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ -თვის სრულდებოდეს ტოლობა $E_D\left(f\right)=E_\Delta\left(f\right)$) აუცილებელია და საკმარისი, რომ Δ იყოს რეგულარული და სრული.*

შედეგი 2.2.2. *იმისათვის, რომ უწყვეტ ფუნქციათა კლასში Δ -გრადიენტის არსებობის პირობა დიფერენცირებადობის პირობის ტოლფასი იყოს (ე.ი. ყოველი უწყვეტი $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის სრულდებოდეს ტოლობა $E_D\left(f\right)=E_\Delta\left(f\right)$) აუცილებელია და საკმარისი, რომ Δ იყოს რეგულარული და $\overline{\Delta}$ იყოს სრული.*

მესამე პარაგრაფში შეისწავლება ბაზისის მიმართ გრადიენტის არსებობისა და დიფერენცირებადობის პირობების დადებითი ზომის სიმრავლეებზე შედარების საკითხი.

2.2.1 და 2.2.4 თეორემებიდან გამომდინარე, თუ Δ ბაზისი სრულია და Δ უშვებს არგუმენტის ნაზრდის ანიზოტროპულ (ანუ მხებით) მიახლოებას ნულთან, მაშინ Δ-გრადიენტის არსებობის პირობა დიფერენცირებადობის პირობაზე უფრო ძლიერია. ვიცით აგრეთვე, რომ (იხ. თეორემა 1.1.A), თუ $\Delta(\pi/2)$ ბაზისის სახით საქმე გვაქვს ძლიერ გრადიენტთან, (ანუ იმ შემთხვევასთან როცა ნაზრდის ანიზოტროპულობა შეუზღუდავია), მაშინ ვღებულობთ არსებითად უფრო ძლიერ პირობას ვიდრე დიფერენცირებადობაა.

ისმის კითხვა იმის შესახებ, თუ ანიზოტროპულობის რა მახასიათებელი იწვევს დიფერენციროებადობაზე არსებითად ძლიერი პირობის წარმოქმნას.

ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ თეორემას, რომელიც გვიჩვენებს, რომ დიფერენცირებადობის პირობის არსებითი გაძლიერებისათვის საკმარის თვისებას წარმოადგენს ნაზრდების სიმრავლის(ბაზისის) „ანიზოტროპული სიმკვრივე“ ზომის თვალსაზრისით.

მოვიყვანოთ საჭირო განმარტებები. $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ ინტერვალისათვის აღვნიშნოთ

$$r_i(I) = \frac{\max_{j \neq i} |I_j|}{|I_i|} \quad \left(i \in \overline{1,n}\right).$$

$E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ვუწოდოთ 0 წერტილში ანიზოტროპულად მკვრივი i -ური ცვლადის მიხედვით, თუ მოიძებნება $\alpha > 0$ რიცხვი და n -განზომილებიანი ინტერვალების $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ მიმდევრობა შემდეგი თვისებებით:

$$diam\, I_k \to 0 \quad (k \to \infty),$$

$$0 \text{ არის } I_k \text{-ს ცენტრი } (k \in \mathbb{N}),$$

$$r_i(I_k) \to \infty \quad (k \to \infty),$$

$$\frac{|E \cap I_k|}{|I_k|} \geq \alpha \quad (k \in \mathbb{N}).$$

$\Delta = (\Delta_1, \cdots, \Delta_n)$ ბაზისს ვუწოდოთ ანიზოტროპულად მკვრივი, თუ მის Δ_i კომპონენტებს შორის ერთერთი მაინც ანიზოტროპულად მკვრივია 0 წერტილში შესაბამისი i -ური ცვლადის მიხედვით.

თეორემა 2.3.1. *თუ Δ ბაზისი ანიზოტროპულად მკვრივია, მაშინ არსებობს უწყვეტი ფუნქცია $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ისეთი, რომ*

1) f დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან,

2) f არა აქვს Δ - გრადიენტი თითქმის არსად.

შედეგი. 2.3.1. *თუ Δ ბაზისი სრულია და ანიზოტროპულად მკვრივი, მაშინ Δ - გრადიენტის არსებობის პირობა არსებითად ძლიერია ვიდრე დიფერენცირებადობის პირობა.*

დასასრულ, მსურს ღრმა მადლიერება გამოვხატო სამეცნიერო ხელმძღვანელის პროფ. გიორგი ონიანის მიმართ კვლევისას გაწეული თანამშრომლობისა და ნაყოფიერი განხილვებისათვის.

თავი I

მრავალი ცვლადის სასრული ვარიაციის

ფუნქციების დიფერენციალური თვისებების შესახებ

§1.1. ზოგიერთი ცნობა სასრული ვარიაციის ფუნქციების შესახებ

1. სასრული ვარიაციის ინტერვალის ფუნქციები. ვთქვათ F ყველა n-განზომილებიანი ინტერვალის კლასზე განსაზღვრული ფუნქციაა (მოკლედ: ინტერვალის ფუნქცია). F ფუნქციას ეწოდება ადიციური, თუ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ინტერვალების ნებისმიერი $I_1,\ldots,I_m$ ოჯახისათვის, რომელთა გაერთიანება არის რაიმე I ინტერვალი, სრულდება ტოლობა

$$F(I)=\sum_{k=1}^{m}F(I_k).$$

I ინტერვალის დანაწილება ეწოდება წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი ინტერვალების სასრულ ოჯახს, რომლის გაერთიანება არის I. Π_I-თი აღვნიშნოთ I ინტერვალის ყველა შესაძლო დანაწილების ოჯახი.

ინტერვალის F ფუნქციას ეწოდება I ინტერვალზე სასრული ვარიაციის მქონე, თუ

$$V_I(F)=\sup_{P\in\Pi_I}\sum_{J\in P}|F(J)|<\infty.$$

F ეწოდება სასრული ვარიაციის $\mathbb{R}^n$-ზე, თუ $V_I(F)$ სიდიდეების სუპრემუმი, აღებული ყველა შესაძლო I ინტერვალის მიხედვით, არის სასრული. ხსენებული სუპრემუმი აღვნიშნოთ $V(F)$-ით. $\mathbb{R}^n$-ზე სასრული ვარიაციის მქონე ყველა ინტერვალის ადიციური ფუნქციის კლასი აღვნიშნოთ $V(\mathbb{R}^n)$-ით.

2. ვიტალის, ჰარდისა და არცელას აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციები.

ქვემოთ მოცემული განმარტებები შეიძლება ინახოს [CA], [H],[Vi] შრომებში.

ვთქვათ $x, y \in \mathbb{R}^n$ და $x \le y$ (ე.ი., $x_i \le y_i$ ყოველი $i \in \overline{1,n}$-თვის). I_x^y -ით აღვნიშნოთ

$$\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i]$$

ინტერვალი.

$f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციის შერეული სხვაობა $I = I_x^y \subset [0,1]^n$ ინტერვალზე ეწოდება გამოსახულებას

$$\Delta(f, I) = \sum_{\varepsilon_1=0}^{1} \cdots \sum_{\varepsilon_n=0}^{1} (-1)^{n-\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i} f(x_1 + \varepsilon_1(y_1 - x_1), \ldots, x_n + \varepsilon_n(y_n - x_n)).$$

ვთქვათ Π არის $[0,1]^n$-ის ყველა შესაძლო დანაწილებების ოჯახი.

$f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება სასრული ვარიაციის ვიტალის აზრით, თუ

$$\sup_{P\in\Pi} \sum_{I\in P} |\Delta(f, I)| < \infty.$$

$\mathbb{V}_n$ -ით აღვნიშნოთ $[0,1]^n$ -ზე განსაზღვრული ვიტალის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ყველა ფუნქციის კლასი.

$|B|$ -ით აღვნიშნოთ $B \subset \overline{1,n}$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა.

ვთქვათ $B \subset \overline{1,n}$, $0 < |B| < n, t \in [0,1]^{n-|B|}$ და $\tau \in [0,1]^{|B|}$. (t, τ, B) -თი აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^n$ სივრცის ის წერტილი, რომლისთვისაც $(t,\tau,B)_i = t_{|\overline{1,i}\setminus B|}$, როცა $i \notin B$ და $(t,\tau,B)_i = \tau_{|\overline{1,i}\cap B|}$, როცა $i \in B$.

ვთქვათ f რაიმე ფუნქციაა $[0,1]^n$ -ზე. $B \subset \overline{1,n}$, $0 < |B| < n$, სიმრავლისათვის და $t \in [0,1]^{n-|B|}$ წერტილისათვის $f_{B,t}$ -თი აღვნიშნოთ $[0,1]^{|B|}$ -ზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია

$$f_{B,t}(\tau) = f((t, \tau, B)) \ (\tau \in [0,1]^{|B|}).$$

$f_{B,t}$ შეიძლება განხილული იქნას, როგორც f ფუნქციის $(B,t)-$ კვეთა. აღვნიშნოთ აგრეთვე $f_B = f_{B,0}$, სადაც 0 არის $\mathbb{R}^{n-|B|}$ სივრცის ნულოვანი ელემენტი. ცხადია, რომ $f_{\overline{1,n}} = f$.

$f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის, თუ f ფუნქცია მის ყოველ კვეთასთან ერთად არის ვიტალის აზრით სასრული ვარიაციის, ე.ი., $f \in \mathbb{V}_n$ და $f_{B,t} \in \mathbb{V}_{|B|}$ ყოველი $B \subset \overline{1,n},\ 0 < |B| < n,$ სიმრავლისათვის და ყოველი $t \in [0,1]^{n-|B|}$ წერტილისათვის.

$[0,1]^n$ -ზე განსაზღვრული ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციების კლასი აღვნიშნოთ $\mathbb{H}_n$ -ით.

ლეონოვმა [Le] დაადგინა, რომ ჰარდის აზრით ვარიაციის სასრულობის შესამოწმებლად ყველა შესაძლო კვეთის ნაცვლად საკმარისია განხილული იქნას მხოლოდ „სტანდარტული" f_B კვეთები. სახელდობრ, ლეონოვმა დაამტკიცა, რომ

$$f \in \mathbb{H}_n \Leftrightarrow f_B \in \mathbb{V}_{|B|} \quad (B \subset \overline{1,n}\ , B \neq \varnothing).$$

გავიხსენოთ, რომ $f \in L[0,1]^n$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი ეწოდება ფუნქციას

$$F_f(x) = \int\limits_{[0,x_1]\times\cdots\times[0,x_n]} f(y)dy \qquad (x \in [0,1]^n).$$

ლეონოვის ზემოაღნიშნული შედეგიდან გამომდინარე მარტივად ვრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი არის ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქცია.

$f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი, თუ $\Delta(f, I_x^y) \geq 0$ ყოველი $x, y \in [0,1]^n$, $x \leq y$, წერტილებისათვის.

$\mathbb{M}_n$ -თი აღვნიშნოთ ყველა ზრდადი $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციის კლასი. ცხადია, რომ $\mathbb{M}_n \subset \mathbb{H}_n$.

ცნობილია, რომ ზრდადი ფუნქცია თითქმის ყველგან უწყვეტია (იხ. [YY]) და შედეგად, არის ზომადი.

ცნობილია აგრეთვე, რომ (იხ. მაგ. [AC]) ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქცია შეიძლება წარმოდგეს როგორც ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობა.

$f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება სასრული ვარიაციის არცელას აზრით, თუ შემდეგი სახის ჯამების სიმრავლე

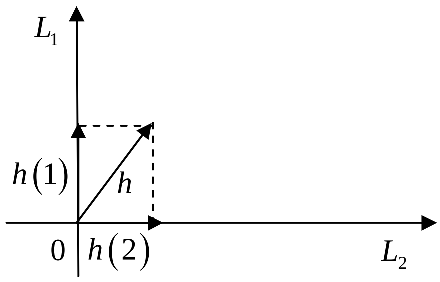
$$\sum_{k=1}^{m-1} | f(x_{k+1}) - f(x_k) |,$$

სადაც $m \in \mathbb{N}$ და $(0,\ldots,0) = x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_m = (1,\ldots,1)$, არის შემოსაზღვრული.

შევნიშნოთ, რომ ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ყოველი ფუნქცია არის სასრული ვარიაციის არცელას აზრითაც (იხ. მაგ. [AC] და [Ho]).

§1.2. ძლიერი გრადიენტის ცნება. ძირითადი თვისებები

$h \in \mathbb{R}^n$ ვექტორისათვის $h(i)$ $(i \in \overline{1,n})$ იყოს შემდეგი სახის ვექტორი: $h(i)_i = 0$ და $h(i)_j = h_j$ თუ $j \in \overline{1,n} \setminus \{i\}$. L_i -ით ($i \in \overline{1,n}$) აღვნიშნოთ $\{h \in \mathbb{R} : h_i = 0\}$ ჰიპერსიბრტყე (იხ. ნახ. 1.2.1).



ნახ. 1.2.1

ვთქვათ f არის $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრული ფუნქცია. თუ $i \in \overline{1,n}$ ინდექსისათვის არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\mathbb{R}^n \setminus L_i \ni h \to 0} \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x+h\left(i\right)\right)}{h_i}$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება f ფუნქციის i -ური ძლიერი კერძო წარმოებული x წერტილში და აღინიშნება სიმბოლოთი $D_{[i]} f(x)$. თუ f ფუნქციას აქვს სასრული $D_{[i]} f(x)$ ყოველი $i \in \overline{1,n}$ ინდექსისათვის, მაშინ ამბობენ, რომ f ფუნქციას აქვს ძლიერი გრადიენტი x წერტილში.

ძლიერი გრადიენტის ცნება შემოღებული იქნა ო. ძაგნიძის [Dz1] მიერ ლებეგის ჯერადი განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენციალური თვისებების შესწავლასთან დაკავშირებით.

როგორც ცნობილია, წერტილში ჩვეულებრივი გრადიენტის, ანუ ჩვეულებრივი კერძო წარმოებულების, არსებობა არ იწვევს ფუნქციის დიფერენცირებადობას. განსხვავებით ჩვეულებრივი გრადიენტისაგან, ძლიერი გრადიენტი იძლევა უფრო ძლიერ პირობას ვიდრე დიფერენცირებადობაა. კერძოდ, ო. ძაგნიძემ [Dz1] დაადგინა, რომ: თუ ფუნქციას წერტილში აქვს ძლიერი გრადიენტი, მაშინ ის დიფერენცირებადია ამავე წერტილში; ხოლო შებრუნებული იმპლიკაცია საზოგადოდ სამართლიანი არაა, სახელდობრ, ფუნქცია $f(x_1,x_2)=|x_1x_2|^{2/3}$ დიფერენცირებადია 0 წერტილში, მაგრამ არა აქვს ძლიერი გრადიენტი ამავე წერტილში.

გადმოცემის სისრულისათვის მოვიყვანოთ ამ დებულებების დამტკიცება [Dz1]-ის მიხედვით. ვთქვათ f-ს აქვს ძლიერი გრადიენტი x წერტილში. მარტივი დასანახია, რომ ფუნქციის ნაზრდი $f(x+h)-f(x)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x)= \\ =\left[f(x+h)-f(x+h(1))\right]+ \\ +\left[f(x+h(1))-f(x+h(1)(2))\right]+\cdots+ \\ +\left[f(x+h(1)(2)\cdots(n-1))-f(x)\right]. \end{aligned}$$

თუ ჯამის i-ური შესაკრებებისათვის გამოვიყენებთ ძლიერი i-ური კერძო წარმოებულის განმარტებას, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x)= \\ =\left[D_{[1]}f(x)h_1+\bar{o}(h_1)\right]+ \\ +\left[D_{[2]}f(x)h_2+\bar{o}(h_2)\right]+\cdots+ \\ +\left[D_{[n]}f(x)h_n+\bar{o}(h_n)\right], \end{aligned}$$

საიდანაც ცხადად გამომდინარეობს f-ის დიფერენცირებადობა x წერტილში. რაც შეეხება $f(x_1,x_2)=|x_1x_2|^{2/3}$ ფუნქციას. ცხადია, რომ $D_1f(0,0)=D_2f(0,0)=0$, სადაც D_1 და D_2 აღნიშნავს ჩვეულებრივ კერძო წარმოებულებს. ამასთანავე გვაქვს

$$f(h_1,h_2)=|h_1h_2|^{2/3}=\bar{o}\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right),$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ f დიფერენცირებადია $(0,0)$-ში. მეორეს მხრივ

$$\frac{f\left(h_1,h_2\right)-f\left(0,h_2\right)}{h_1}=\frac{\left|h_1h_2\right|^{2\backslash 3}}{h_1}$$

ფარდობა განშლადია, თუ $h=\left(h_1,h_2\right)$ ნაზრდი ნულისაკენ მიისწრაფვის $\left\{\left(t,t^{1/3}\right):0\le t\le 1\right\}$ წირის გასწრივ, რაც იწვევს $\left(0,0\right)$ წერტილში x_1 ცვლადის მიხედვით ძლიერი კერძო წარმოებულის არარსებობას. ანალოგიური არგუმენტაციით დგინდება მეორე ცვლადით ძლიერი კერძო წარმოებულის არარსებობაც.

ამრიგად, ფიქსირებულ წერტილში დიფერენცირებადობის პირობა უფრო სუსტია ვიდრე ძლიერი გრადიენტის არსებობის პირობა. საინტერესოა რა ხდება დადებითი ზომის სიმრავლეებზე ამ პირობების შედარებისას? საკითხის ასეთი დასმა საინტერესო ხდება თუ გავითვალისწინებთ, რომ რაიმე (A) პირობის რაიმე (B) პირობასთან შედარებით წერტილოვნად სისუსტის ეფექტი შეიძლება სულაც არ ვრცელდებოდეს დადებითი ზომის სიმრავლეებზე: მაგალითისათვის საკმარისია მოვიტანოთ მარჯვნიდან დიფერენცირებადობის და ორმხრივად დიფერენცირებადობის პირობები, რომლელთა შორის პირველი წერტილოვნად სუსტია მეორეზე, მაგრამ დანჟუას ცნობილი თეორემის ძალით(იხ. მაგ. [Sa1, თ. მე-9, §4]) თუ ფუნქცია მარჯვნიდან დიფერენცირებადია რაიმე სიმრავლეზე, მაშინ ის ორმხრივად დიფერენცირებადია იგივე სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილში). ასეთ შემთხვევაში, იმ საკითხებში, სადაც მნიშვნელოვანია პირობის შესრულება თითქმის ყველგან, (B) პირობა არანაირ უპირატესობას არ იძლევა (A) პირობასთან შედარებით.

შემოვიღოთ შემდეგი განმარტება: (A) პირობას ვუწოდოთ არსებითად უფრო ძლიერი (B) პირობასთან შედარებით (ან კიდევ, (B) ვუწოდოთ არსებითად უფრო სუსტი (A) პირობასთან შედარებით), თუ :

1. (A)-ს შესრულება ფიქსირებულ წერტილში იწვევს (B)-ს შესრულებას ამავე წერტილში;
2. არსებობს ფუნქცია, რომლისთვისაც (B) შესრულებულია დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლის თითოეულ წერტილში, მაგრამ (A) არაა შესრულებული იგივე სიმრავლის არცერთ წერტილში.

ახლა კითხვა შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: არის თუ არა ძლიერი გრადიენტის არსებობის პირობა არსებითად უფრო ძლიერი ვიდრე დიფერენცირებადობის პირობა?

ამ კითხვაზე დადებითი პასუხი გაცემული იქნა გ.გ. ონიანის [O2] მიერ, შემდეგი თეორემის სახით.

თეორემა 1.2.A. *ყოველი* $n \geq 2$ *-თვის არსებობს უწყვეტი ფუნქცია* $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ *ისეთი, რომ:*

3. f *დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან ,*

4. $\overline{\lim\limits_{\mathbb{R}^n \setminus L_1 \ni h \to 0}} \dfrac{f\left(x+h\right)-f\left(x+h(1)\right)}{h_1}=\infty$ *თითქმის ყველგან და შედეგად,* f *-ს თითქმის არსად არა აქვს ძლიერი გრადიენტი.*

შემდგომში ჩვენს მიერ განხილულ საკითხებთან დაკავშირებით მნიშვნელოვანია გავაკეთოთ შემდეგი შენიშვნა: რადგანაც ძლიერი გრადიენტის არსებობის პირობა არსებითად უფრო ძლიერია ვიდრე დიფერენცირებადობის პირობა, ამიტომ ის დებულებები, სადაც თითქმის ყველგან დიფერენცირებადობის ნაცვლად დადგინდება თითქმის ყველგან ძლიერი გრადიენტის არსებობა, იქნებიან საწყისი დებულებების განზოგადებები.

§1.3. სასრული ვარიაციის მქონე ინტერვალის ადიციური ფუნქციის ძლიერი საშუალოების განშლადობის რიგის ზუსტი შეფასება

1. **ზოგიერთი განმარტება და აღნიშვნა.** $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის $\mathbb{I}(x)$ -ით აღვნიშნოთ ყველა n -განზომილებიანი I ინტერვალის ოჯახი, რომელიც შეიცავს x წერტილს.

n -განზომილებიანი $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ინტერვალისათვის აღვნიშნოთ

$$l_k(I) = b_k - a_k \quad (k \in \overline{1,n}).$$

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ $n \in \mathbb{N}$ და $n \geq 2$.

$w: (0,1)^{n-1} \to (0,\infty)$ ფუნქციას, რომელიც კლებადია თითოეული ცვლადის მიმართ ვუწოდოთ წონა.

ვიტყვით, რომ w წონა აკმაყოფილებს (K) პირობას, თუ

$$\int\limits_{(0,1)^{n-1}} \frac{dt_1 \cdots dt_{n-1}}{t_1 \cdots t_{n-1} w(t_1, \ldots, t_{n-1})} < \infty.$$

შენიშვნა 1.3.1. (K) პირობას აკმაყოფილებენ

$$\left(\ln\frac{1}{t_1} \cdot \ln\frac{1}{t_2} \cdot \cdots \cdot \ln\frac{1}{t_{n-1}} \right)^{1+\varepsilon} \qquad \left(n \geq 2,\ \varepsilon > 0 \right)$$

სახის ფუნქციები და არ აკმაყოფილებს

$$\ln\frac{1}{t_1} \cdot \ln\frac{1}{t_2} \cdot \cdots \cdot \ln\frac{1}{t_{n-1}}$$

ფუნქცია. ანალოგიური შეიძლება ითქვას უფრო ზოგადი სახის

$$w_{n,k,\varepsilon}\left(t_1,\cdots,t_{n-1}\right)=\prod_{i=1}^{n-1}\left[\ln\frac{1}{t_i}\cdot\ln\ln\frac{1}{t_i}\cdot\cdots\cdot\left(\overbrace{\ln\ln\cdots\ln}^{k-\text{jer}}\frac{1}{t_i}\right)^{1+\varepsilon}\right]$$

ფუნქციებზე, შესაბამისად $\varepsilon>0$ და $\varepsilon=0$ შემთხვევებში. ამრიგად, $n=2$ შემთხვევაში, (K) პირობას აკმაყოფილებენ $\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}$ $\left(\varepsilon>0\right)$ სახის ფუნქციები და არ აკმაყოფილებს $\ln\frac{1}{t}$ ფუნქცია.

შენიშვნა 1.3.2. ადვილი დასანახია, რომ (K) პირობის დამაკმაყოფილებელი ყოველი w წონისათვის სრულდება ტოლობა $\lim\limits_{t\to 0}w(t)=\infty$.

P_n -ით აღვნიშნოთ $\{1,\dots,n\}$ სიმრავლის ყველა გადანაცვლების კლასი.

ვთქვათ w წონაა, $f\in L(\mathbb{R}^n),F\in V(\mathbb{R}^n)$ და $x\in\mathbb{R}^n$. აღვნიშნოთ

$$M_w(f)(x)=\sup_{I\in\mathbb{I}(x),diamI<1}\max_{p\in P_n}\frac{1}{|I|\,w(l_{p(1)}(I),\dots,l_{p(n-1)}(I))}\int_I|f|;$$
$$T_w(F)(x)=\sup_{I\in\mathbb{I}(x),diamI<1}\max_{p\in P_n}\frac{V_I(F)}{|I|\,w(l_{p(1)}(I),\dots,l_{p(n-1)}(I))}.$$

$c(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ -ით აღნიშნული იქნება მხოლოდ $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ პარამეტრებზე დამოკიდებული დადებითი მუდმივები.

2. **საკითხის დასმა და შედეგი.** ს. საქსმა [Sa2] და ჰ. ბუზემანმა და ვ. ფელერმა [BF] ააგეს მაგალითი $f\in L(\mathbb{R}^n), f\geq 0,$ ფუნქციისა, რომლის ძლიერი ინტეგრალური საშუალოები შემოუსაზღვრელად განშლადია ყოველ წერტილში, კერძოდ, ყოველი $x\in\mathbb{R}^n$ წერტილისათვის

$$\limsup_{I\in\mathbb{I}(x),diamI\to 0}\frac{1}{|I|}\int_I f=\infty.$$

აქვე შევნიშნავთ, რომ ყველაზე ფართო ინტეგრალური კლასი, რომელშიც უზრუნველყოფილია ძლიერი ინტეგრალური საშუალოების თითქმის ყველგან კრებადობა არის $L(1+\ln^+L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ (იხ. [JMZ] და [Sa3]).

გ. კარაგულიანმა [Ka] დაადგინა ძლიერი ინტეგრალური საშუალოების განშლადობის რიგის ზუსტი შეფასება. კერძოდ, დაამტკიცა შემდეგი

თეორემა 1.3.A. *თუ w წონა აკმაყოფილებს* (K) პირობას, *მაშინ ყოველი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის თითქმის ყოველ $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილში სრულდება შეფასება*

$$\frac{1}{|I|}\int_I f = o[\min_{p\in P_n} w(l_{p(1)}(I),\ldots,l_{p(n-1)}(I))],\ \ roca\ \ I \in \mathbb{I}(x),\ diamI \to 0.$$

გარდა ამისა, M_w ოპერატორი არის სუსტი (1,1) *ტიპის, ე.ი.*

$$|\{M_w(f) > \lambda\}| \le \frac{c(w,n)}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f| \quad (f \in L(\mathbb{R}^n),\quad \lambda > 0).$$

ხოლო იმ შემთხვევაში თუ w წონა არ აკმაყოფილებს (K) *პირობას, მაშინ არსებობს $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f \ge 0$, ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$.* წერტილისათვის

$$\limsup_{I\in\mathbb{I}(x),diamI\to 0}\frac{1}{|I|\,w(l_1(I),\ldots,l_{n-1}(I))}\int_I f = \infty.$$

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ თეორემა 1.3.A-ს დასკვნა სამართლიანია უფრო ზოგად სიტუაციაში, კერძოდ, ის სრულდება სასრული ვარიაციის მქონე სეგმენტის ადიციური ფუნქციების ძლიერი საშუალოებისათვის.

თეორემა 1.3.1. *თუ w წონა აკმაყოფილებს* (K) *პირობას, მაშინ ყოველი $F \in V(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის თითქმის ყოველ $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილში სრულდება შეფასება*

$$\frac{F(I)}{|I|} = o[\min_{p\in P_n} w(l_{p(1)}(I),\ldots,l_{p(n-1)}(I))],\ \ roca\ \ I \in \mathbb{I}(x),\ diamI \to 0.$$

გარდა ამისა,

$$|\{T_w(F) > \lambda\}| \le \frac{c(w,n)}{\lambda}V(F) \quad (F \in V(\mathbb{R}^n),\quad \lambda > 0).$$

შენიშვნა 1.3.3. ვთქვათ w არის წონა, რომელიც არ აკმაყოფილებს (K) პირობას, და ვთქვათ f არის ფუნქცია თეორემა 1.3.A-ს მეორე ნაწილიდან, რომელიც შეესაბამება w წონას. თუ f -ის განუსაზღვრელ ინტეგრალს განვიხილავთ როგორც ინტერვალის ფუნქციას, ე.ი., თუ განვიხილავთ $F(I) = \int_I f$ ტოლობით განსაზღვრულ ინტერვალის F ფუნქციას, სადაც I ნებისმიერი n -განზომილებიანი ინტერვალია, დავასკვნით თეორემა 1.3.1-ში მოცემული შეფასების სიზუსტეს .

შენიშვნა 1.3.4. თეორემა 1.3.1 არსებით გამოყენებას პოულობს მომდევნო პარაგრაფში, ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციათა დიფერენციალური თვისებების შესწავლისას.

შენიშვნა 1.3.5. თეორემა 1.3.1 გამოქვეყნებული იქნა [BO2] , [BO3] შრომებში.

3. თეორემა 1.3.1-ის დამტკიცება. დამტკიცებისათვის დაგვჭირდება შემდეგი ორი ლემა.

ლემა 1.3.A (იხ. [Sa1, თ.IV, § 4]). *n-განზომილებიანი ინტერვალების ნებისმიერი R ოჯახისათვის $\bigcup_{I\in R} I$ სიმრავლე ზომადია.*

ლემა 1.3.B (იხ. [Ka]). *ვთქვათ w წონა აკმაყოფილებს* (K) *პირობას და ვთქვათ R არის n-განზომილებიანი ინტერვალების რაიმე ოჯახი, რომლისთვისაც $\bigcup_{I\in R} I$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია. მაშინ ნებისმიერი $p\in P_n$ გადანაცვლებისათვის არსებობს R-ის სასრული ქვეოჯახი R^*, რომელიც შედგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წევრებისაგან ისეთი, რომ*

$$\sum_{I\in R^*} |I|\, w(\ell_{p(1)}(I),\ldots,\ell_{p(n-1)}(I)) \ge c(w,n)\left|\bigcup_{I\in R} I\right|.$$

შენიშვნა 1.3.5. [Ka] ნაშრომში ლემა 1.3.B ჩამოყალიბებულია იგიური გადანაცვლე-ბისათვის, საიდანაც მარტივად გამომდინარეობს ლემის ზემოთმოყვანილი ვარიანტი.

გადავიდეთ უშუალოდ თეორემის დამტკიცებაზე. აღვნიშნოთ

$$\Phi(I) = \frac{F(I)}{|I|\, w(\ell_1(I),\ldots,\ell_{n-1}(I))},$$
$$E_{\alpha,\delta} = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\le\alpha,\ \lim_{r\to 0}\sup_{I\in\mathbb{I}(x),diamI<r}\Phi(I)\ge\delta\} \qquad (\alpha>0,\ \delta>0),$$
$$E_{\alpha,\delta,k} = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\le\alpha,\ \sup_{I\in\mathbb{I}(x),diamI<1/k}\Phi(I)\ge\delta\}\ \ (\alpha>0,\ \delta>0,\ k\in\mathbb{N}).$$

შევნიშნოთ, რომ $E_{\alpha,\delta,k}$ (და შედეგად $E_{\alpha,\delta}$) სიმრავლეები ზომადები არიან ლემა 1.3.A-ს ძალით.

დავუშვათ თეორემის პირველი ნაწილის საწინააღმდეგო. მაშინ მარტივი შესამოწმებელია, რომ მოიძებნებიან $\alpha > 0$ და $\delta > 0$ რიცხვები, რომელთათვისაც $|E_{\alpha,\delta}| > 0$.

ვთქვათ $A \subset \mathbb{R}^n$ და $\varepsilon > 0$. $R(\varepsilon, A)$ -თი აღვნიშნოთ ყველა იმ I ინტერვალის ოჯახი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$I \cap A \neq \varnothing, \ diamI < \varepsilon, \ \Phi(I) \geq \delta.$$

განვიხილოთ $h_k \to \infty$ და $\varepsilon_k \to 0$ მიმდევრობები თვისებებით:

$$h_k > \frac{2^{k+1}3^n V(F)}{\delta |E_{\alpha,\delta}|},$$

$$w(\ell_1(I), \ldots, \ell_{n-1}(I)) > h_k \quad \text{roca} \quad diamI < \varepsilon_k.$$

ლემა 1.3.B-ს ძალით მოიძებნება $R(\varepsilon_1, E_{\alpha,\delta})$ ოჯახის სასრული ქვეოჯახი R_1 რომელიც შედგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალებისაგან ისეთი, რომ

$$\sum_{I \in R_1} |I| w(\ell_1(I), \ldots, \ell_{n-1}(I)) \geq$$
$$\geq c(w,n) \left| \bigcup_{I \in R(\varepsilon_1, E_{\alpha,\delta})} I \right| \geq$$
$$\geq c(w,n) |E_{\alpha,\delta}|.$$

I ინტერვალისათვის $3I$ -თი აღვნიშნოთ I -ს ანასახი იმ ჰომოთეტიისას, რომლის კოეფიციენტია 3 და რომლის ცენტრი ემთხვევა I -ს ცენტრს.

გვაქვს, რომ

$$V(F) \geq \sum_{I \in R_1} |F(I)| \geq$$
$$\geq \sum_{I \in R_1} \delta |I| w(\ell_1(I), \ldots, \ell_{n-1}(I)) \geq$$
$$\geq \delta h_1 \sum_{I \in R_1} |I|,$$

საიდანაც

$$\left| \bigcup_{I \in R_1} 3I \right| \leq 3^n \sum_{I \in R_1} |I| \leq \frac{3^n V(F)}{\delta h_1} < \frac{|E_{\alpha,\delta}|}{2^2}.$$

ვთქვათ $R_1,\dots,R_{k-1}$ ოჯახები უკვე აგებულია. აღვნიშნოთ

$$\begin{aligned}\lambda_{k-1} &= \min\{\ell_i(I): i\in\overline{1,n},\ I\in\bigcup_{j=1}^{k-1}R_j\},\\ \eta_k &= \min\{\varepsilon_k,\lambda_{k-1}\}.\end{aligned}$$

ლემა 1.3.B-ს გამოყენებით შეგვიძლია ამოვარჩიოთ

$$R_k^* = R\left(\eta_k, E_{\alpha,\delta}\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}\bigcup_{I\in R_j} I\right)$$

ოჯახის სასრული ქვეოჯახი R_k, რომელიც შედგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალებისაგან ისეთი, რომ

$$\begin{aligned}\sum_{I\in R_k}|I|\,w(\ell_1(I),\dots,\ell_{n-1}(I)) &\ge\\ \ge c(w,n)\left|\bigcup_{I\in R_k^*} I\right| &\ge\\ \ge c(w,n)\,|E_{\alpha,\delta}\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}\bigcup_{I\in R_j} I|.&\end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned}V(F) &\ge \sum_{I\in R_k}|F(I)|\ge\\ &\ge \sum_{I\in R_k}\delta\,|I|\,w(\ell_1(I),\dots,\ell_{n-1}(I))\ge\\ &\ge \delta h_k\sum_{I\in R_k}|I|,\end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს შეფასება

$$\left|\bigcup_{I\in R_k}3I\right|\le 3^n\sum_{I\in R_k}|I|\le\frac{3^nV(F)}{\delta h_k}<\frac{|E_{\alpha,\delta}|}{2^{k+1}}.$$

ადვილი დასანახია, რომ აგებული ოჯახების R_k მიმდევრობას აქვს თვისებები:

1) $\bigcup_{k=1}^{\infty}R_k$ ოჯახის ინტერვალები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია;

2) ყოველი $k \in \mathbb{N}$ -თვის $\sum_{I \in R_k} |I| w\left(l_1(I), \cdots, l_{n-1}(I)\right) \geq \frac{c(w,n)|E_{\alpha,\delta}|}{2}$;

3) ყოველი $I \in \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ -თვის $|F(I)| \geq \delta |I| w\left(l_1(I), \cdots, l_{n-1}(I)\right)$.

აღნიშნული თვისებებიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ

$$V(F) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{I \in R_k} |F(I)| \geq$$
$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{I \in R_k} \delta |(I)| w(\ell_1(I), \ldots, \ell_{n-1}(I)) \geq$$
$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \delta \frac{c(w,n)|E_{\alpha,\delta}|}{2} = \infty.$$

მიღებული წინააღმდეგობის ძალით ვასკვნით თეორემის პირველი ნაწილის სამართლიანობას.

ვთქვათ $p \in P_n$ და

$$T_{p,w}(F)(x) = \sup_{I \in \mathbb{I}(x), diam I < 1} \frac{V_I(F)}{|I| w(\ell_{p(1)}(I), \ldots, \ell_{p(n-1)}(I))}.$$

R იყოს ყველა იმ I ინტერვალის ოჯახი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$diam I < 1 \text{ და } \frac{V_I(F)}{|I| w(\ell_{p(1)}(I), \ldots, \ell_{p(n-1)}(I))} > \lambda .$$

ცხადია, რომ

$$\{T_{p,w}(F) > \lambda\} = \bigcup_{I \in R} I .$$

ლემა 1.3.B-ის ძალით მოიძებნება $R^* \subset R$ სასრული ქვეოჯახი, რომელიც შედგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალებისაგან ისეთი, რომ

$$\sum_{I \in R^*} |I| w(\ell_{p(1)}(I), \ldots, \ell_{p(n-1)}(I)) \geq$$
$$\geq c(w,n) \left| \bigcup_{I \in R} I \right| \geq$$
$$\geq c(w,n) \left| \left\{ T_{p,w}(F) > \lambda \right\} \right|.$$

ამრიგად,

$$
\begin{aligned}
V(F) &\geq \sum_{I\in R^*} V_I(F) > \\
&> \sum_{I\in R^*} \lambda\, |I|\, w(\ell_{p(1)}(I),\ldots,\ell_{p(n-1)}(I)) \geq \\
&\geq \lambda c(w,n)\left|\left\{T_{p,w}(F) > \lambda\right\}\right|.
\end{aligned}
$$

ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ ტოლობას

$$
T_w(F)(x) = \max_{p\in P_n} T_{p,w}(F)(x),
$$

დავასკვნით თეორემის მეორე ნაწილის სამართლიანობას. თეორემა დამტკიცებულია.

§1.4. ძლიერი გრადიენტის თითქმის ყველგან არსებობა ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციებისათვის

1. საკითხის დასმა და შედეგი. მრავალი ცვლადის სასრული ვარიაციის ფუნქციათა დიფერენციალური თვისებები შეისწავლებოდა სხვადასხვა ავტორის მიერ. ბერკილისა და ჰასლამ-ჯონსის [BH] მიერ დამტკიცებული იყო შემდეგი

თეორემა 1.4.A. *არცელას აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ნებისმიერი $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან. შედეგად, ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ნებისმიერი $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან.*

ცნობილია აგრეთვე, რომ: $[0,1]^n$ -ზე განსაზღვრული, კრონროდ-ვიტუშკინის აზრით სასრული ვარიაციის ნებისმიერი ფუნქცია თითქმის ყველგან დიფერენცირებადია (კრონროდი [Kr]-ორგანზომილებიანი შემთხვევა; ვიტუშკინი [Vi] - ნებისმიერი განზომილებისათვის (იხ. აგრეთვე, [Iv, თ.V, §5]). არსებობს ტონელის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქცია $[0,1]^2$ -ზე, რომელიც არსად არაა დიფერენცირებადი (სტეჰანოვი [St]), აქვე აღვნიშნავთ, რომ მარტივი შესამოწმებელია ანალოგიური დებულების სამართლიანობა ვიტალის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციებისათვის.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ნებისმიერი $f \in L[0,1]^n$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი არის ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქცია, რისი გათვალისწინებით და თეორემა 1.4.A-ს ძალით ვასკვნით ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის თითქმის ყველგან დიფერენცირებადობას. ო. ძაგნიძის [Dz1] მიერ (ორგანზომილებიან შემთხვევაში) და ო.ძაგნიძისა და გ.გ.ონიანის [DO] მიერ (ნებისმიერი განზომილებისათვის) დადგენილი იქნა, რომ ლებეგის განუსაზღვრელ ინტეგრალს აქვს უფრო ძლიერი დიფერენციალური თვისება, კერძოდ, მას აქვს ძლიერი გრადიენტი თითქმის ყველგან.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: აქვს თუ არა ჰარდის (არცელას) აზრით სასრული ვარიაციის ნებისმიერ ფუნქციას ძლიერი გრადიენტი თითქმის ყველგან?

შემდეგი თეორემა გვაძლევს დასმულ კითხვაზე დადებით პასუხს ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციებისათვის.

თეორემა 1.4.1. *ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ნებისმიერ $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას აქვს ძლიერი გრადიენტი თითქმის ყველგან.*

შენიშვნა 1.4.1. თეორემა 1.4.1-ის დამტკიცებისას არსებითად გამოიყენება თეორემა 1.3.1.

შენიშვნა 1.4.2. თეორემა 1.4.1 გამოქვეყნებული იქნა [BO1] , [BO3] შრომებში.

მომდევნო პარაგრაფში დამტკიცდება თეორემა, რომელიც გვიჩვენებს, რომ არცელას აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციებისათვის დასმულ კითხვაზე პასუხი უარყოფითია.

2. დამხმარე დებულებები.

ლემა 1.4.1. *თუ $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ზრდადი ფუნქციისათვის არსებობს ზღვარი*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k},$$

სადაც $(h_k)_{k\ge 1}$ შემდეგი თვისებების მქონე მიმდევრობაა:

$$\lim_{k\to\infty} h_k = 0,$$

$$|h_k| > |h_{k+1}| \ \ (k \in \mathbb{N}),$$

$$(-1)^k h_k < 0 \ \ (k \in \mathbb{N}),$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|h_k|}{|h_{k+1}|} = 1.$$

მაშინ f ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში.

დამტკიცება. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ყოველი $k \in \mathbb{N}$ *და ყოველი* h -თვის, რომელიც მოთავსებულია h_k და h_{k+2} რიცხვებს შორის, სრულდება შეფასებები:

$$\frac{f(x+h_{k+2})-f(x)}{h_k} \le \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le \frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_{k+2}},$$

საიდანაც $\lim\limits_{k\to\infty} h_k/h_{k+2} = 1$ პირობის გათვალისწინებით ვასკვნით ლემის სამართლიანობას.

ლემა 1.4.2. *ვთქვათ* $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ *ზომადი და* i *-ური ცვლადის მიმართ ზრდადი ფუნქციაა. მაშინ ყველა იმ* $x \in [0,1]^n$ *წერტილის სიმრავლე, რომელშიც არსებობს* f *-ის კერძო წარმოებული* i *-ური ცვლადის მიხედვით, ზომადია და აქვს სრული ზომა.*

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ $i=1$. ვთქვათ A არის სიმრავლე ყველა იმ $x \in [0,1]^n$ წერტილისა, რომელშიც f -ს აქვს კერძო წარმოებული პირველი ცვლადის მიმართ. ლემა 1-ის ძალით A ტოლია ყველა იმ $x \in [0,1]^n$ წერტილის სიმრავლისა, რომელშიც არსებობს ზღვარი

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_1+(-1)^k/k, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{(-1)^k/k}.$$

აქედან გამომდინარე, f -ის ზომადობის გათვალისწინებით ვასკვნით A სიმრავლის ზომადობას. შემდეგ, რადგანაც f არის ზრდადი პირველი ცვლადის მიმართ, ამიტომ A -ს აქვს სრული ზომა $\left[0,1\right]^n$ -ის თითოეულ ერთგანზომილებიან კვეთაზე, რომელიც პარალელურია Ox_1 ღერძის. ახლა, A -ს ზომადობისა და ფუბინის თეორემის ძალით ვასკვნით, რომ A არის სრული ზომის სიმრავლე. ლემა დამტკიცებულია.

თუ გამოვიყენებთ თეორემა 1.3.1-ს $w(t)=1/t$ $(0<t<1)$ წონისათვის ადვილად მივიღებთ შემდეგ ლემას.

ლემა 1.4.3. *ვთქვათ* F *ყველა ორგანზომილებიანი ინტერვალის კლასზე განსაზღვრული ადიციური და სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციაა. მაშინ თითქმის ყველა* $x \in \mathbb{R}^2$ *წერტილისათვის სრულდება ტოლობა*

$$\lim_{I\in \mathbb{I}(x), diam I\to 0} \frac{F(I)}{\min(\ell_1(I), \ell_2(I))} = 0.$$

აღვნიშნოთ

$$\Delta = \{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n : |\delta_i| = 1, i \in \overline{1,n}\}$$

$$\mathbb{R}^n_\delta = \{h \in \mathbb{R}^n : \delta_i h_i \geq 0, i \in \overline{1,n}\}$$

ვთქვათ $i \in \overline{1,n}$ და $\delta \in \Delta$. ზღვარს

$$\lim_{\mathbb{R}^n_\delta \setminus L_i \ni h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x+h(i))}{h_i}$$

მისი არსებობის შემთხვევაში, ვუწოდოთ f ფუნქციის i -ური ძლიერი კერძო δ -წარმოებული x წერტილში და იგი აღვნიშნოთ $D^\delta_{[i]} f(x)$ სიმბოლოთი. თუ f -ს აქვს $D^\delta_{[i]} f(x)$ ყოველი $i \in \overline{1,n}$ -თვის, მაშინ ვიტყვით, რომ f -ს აქვს ძლიერი δ -გრადიენტი x წერტილში. იმ შემთხვევაში, როცა $\delta = (1,1,\dots,1)$, ძლიერ δ -გრადიენტს ვუწოდოთ ძლიერი მარჯვენა გრადიენტი და $D^\delta_{[i]} f(x)$ აღვნიშნოთ $D^+_{[i]} f(x)$ -თი, ხოლო $\mathbb{R}^n_\delta$ აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^n_+$ -ით.

ლემა 1.4.4. *თუ ყოველ $f \in \mathbb{H}_n$ ფუნქციას აქვს ძლიერი მარჯვენა გრადიენტი თითქმის ყველგან , მაშინ ყოველ $f \in \mathbb{H}_n$ ფუნქციას აქვს ძლიერი გრადიენტი თითქმის ყველგან.*

დამტკიცება. დავუშვათ $f \in \mathbb{H}_n$. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი მოცემული $i \in \overline{1,n}$ -თვის და $\delta \in \Delta$ -თვის $D^\delta_{[i]} f(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან .

განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული $T_\delta : [0,1]^n \to [0,1]^n$ ასახვა

$$T_\delta(x) = \left(\frac{1}{2} + \delta_1\left(x_1 - \frac{1}{2}\right), \dots, \frac{1}{2} + \delta_n\left(x_n - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (x \in [0,1]^n).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$f \circ T_\delta \in \mathbb{H}_n$$

და

$$D^+_{[i]}(f \circ T_\delta)(T_\delta(x)) = \delta_i D^\delta_{[i]} f(x), \ \ x \in [0,1]^n$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ T_δ არის ზომის შემნახავი ასახვა, დავასკვნით რომ $D^\delta_{[i]} f\left(x\right)$ არსებობს თითქმის ყველგან.

$E_{i,\delta} (i \in \overline{1,n}, \delta \in \Delta)$ იყოს სიმრავლე ყველა იმ x წერტილისა, რომელშიც არსებობს $D^\delta_{[i]} f(x)$, ხოლო E' იყოს სიმრავლე ყველა x იმ წერტილისა, რომელშიც f

დიფერენცირებადია. შევნიშნოთ, რომ თეორემა 1.4.A-ს ძალით, E' არის სრული ზომის სიმრავლე. $E'_{i,\delta}$-თი აღვნიშნოთ E' და $E_{i,\delta}$ სიმრავლეების თანაკვეთა. გვექნება, რომ:

1) $E'_{i,\delta}$ არის სრული ზომის სიმრავლე;

2) $D^{\delta}_{[i]}f(x) = D_i f(x)$ ყოველთვის როცა $i \in \overline{1,n}, \delta \in \Delta$ და $x \in E'_{i,\delta}$, სადაც $D_i f(x)$ აღნიშნავს f ფუნქციის i-ურ კერძო წარმოებულს.

უკანასკნელი ორი წინადადებიდან ვასკვნით ლემის სამართლიანობას.

$\mathbb{M}^*_n$-ით აღვნიშნოთ ყველა იმ $f \in \mathbb{M}_n$ ფუნქციის კლასი, რომლისთვისაც $f(x) = 0$ ყოველთვის როცა $x \in [0,1]^n$, $x_i = 0$, $i \in \overline{1,n}$.

ვთქვათ $B \subset \overline{1,n}$ და $0 <|B|< n$. $\mathbb{M}_n(B)$-თი აღვნიშნოთ $[0,1]^n$-ზე განსაზღვრული ყველა იმ f ფუნქციის კლასი, რომლისთვისაც მოიძებნება $g \in \mathbb{M}_{|B|}$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$f((t,\tau,B)) = g(\tau) \text{ ყოველთვის როცა } t \in [0,1]^{n-|B|} \text{ და } \tau \in [0,1]^{|B|}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\mathbb{M}_n(B) \subset \mathbb{M}_n$.

ლემა 1.4.5. $[0,1]^n$ *-ზე განსაზღვრული ნებისმიერი ზრდადი* f *ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ისეთი* $\sum_{i=0}^{n} f_i$ *ჯამის სახით, რომლის წევრები აკმაყოფილებენ პირობებს:*

$$f_0 \in \mathbb{M}^*_n \text{ და } f_i \in \mathbb{M}_n(\overline{1,n}\setminus\{i\}) \text{ როცა } i \in \overline{1,n}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$g_1(x) = f(x) - f(x - x(1)),$$

$$g_i(x) = g_{i-1}(x) - g_{i-1}(x - x(i)) \ (i \in \overline{2,n}).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ შემდეგნაირად განსაზღვრული f_i $(i \in \overline{0,n})$ ფუნქციები დააკმაყოფილებენ საჭირო მოთხოვნებს

$$f_1(x) = f(x - x(1)),\ f_2(x) = g_1(x - x(2)), \ldots, f_n(x) = g_{n-1}(x - x(n)),\ f_0(x) = g_n(x).$$

ლემა დამტკიცებულია.

ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი ლემის სამართლიანობა.

ლემა 1.4.6. *ვთქვათ* $k \in \mathbb{N}$ *,* $i \in \overline{1,k}$ *და* g *არის ფუნქცია* $[0,1]^k$ *-ზე, რომელსაც თითქმის ყველა* $\tau \in [0,1]^k$ *წერტილისათვის აქვს* $D^+_{[i]}g(\tau)$ *წარმოებული (* $k = 1$ *შემთხვევაში იგულისხმება, რომ* g *-ს თითქმის ყველგან აქვს* $D^+g(\tau)$ *მარჯვენა წარმოებული). დავუშვათ, რომ* $n > k$, $B \subset \overline{1,n}$, $|B| = k$ *და*

$$f((t,\tau,B)) = g(\tau) \ \ (t \in [0,1]^{n-k},\ \tau \in [0,1]^k).$$

მაშინ f *ფუნქციას თითქმის ყველა* $x \in [0,1]^n$ *წერტილისათვის აქვს* $D^+_{[i^*]}f(x)$ *წარმოებული, სადაც*

$$i^* = \min\{ j \in \overline{1,n} : |\overline{1,j} \cap B| = i\}.$$

3. თეორემა 1.4.1-ის დამტკიცება. ნებისმიერი $f \in \mathbb{H}_n$ ფუნქცია იშლება $f_1, f_2 \in \mathbb{M}_n$ ფუნქციების სხვაობის სახით, რის გამოც, საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ $\mathbb{M}_n$ კლასის ფუნქციებისათვის.

დავუშვათ $f \in \mathbb{M}_n$ ***და*** $i \in \overline{1,n}$. ***ვაჩვენოთ, რომ*** $D^+_{[i]}f(x)$ ***არსებობს თითქმის ყველგან,*** რის შემდეგაც, ლემა 1.4.4-ის გათვალისწინებით, თეორემა დამტკიცებული იქნება.

სიმარტივისთვის განვიხილოთ $i = n$ შემთხვევა.

თავდაპირველად დებულებას დავამტკიცებთ $\mathbb{M}^*_n$ კლასის ფუნქციებისთვის.

განვიხილოთ ინტერვალის შემდეგი ფუნქცია

$$F(I) = \Delta(f, I \cap [0,1]^n),$$

სადაც I ნებისმიერი n-განზომილებიანი ინტერვალია.

შევნიშნოთ, რომ F არის ინტერვალის ადიციური ფუნქცია(იხ. მაგ. [SG, თ.III, §8.3]) და გარდა ამისა, $f \in \mathbb{M}^*_n \subset \mathbb{H}_n$ პირობიდან (ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის განმარტების გათვალისწინებით) გამომდინარეობს, რომ F არის სასრული ვარიაციის მქონე ინტერვალის ფუნქცია.

ვთქვათ $x \in (0,1)^n$, $h \in \mathbb{R}^n_+$, $h_n > 0$ და $x + h \in (0,1)^n$. $y \in [0,1]^n$-თვის აღვნიშნოთ

$$J(y) = [0, y_1]\times\cdots\times[0, y_{n-1}].$$

Ω იყოს ყველა იმ $(n-1)$-განზომილებიანი $J = I_1\times\cdots\times I_{n-1}$ ინტერვალის ოჯახი, რომელსაც აქვს თვისებები:

1) ყოველი $k\in\overline{1, n-1}$ ინდექსისათვის I_k არის ერთერთი $[0, x_k]$ და $[x_k, x_k+h_k]$ შუალედებს შორის;
2) $I_k = [x_k, x_k+h_k]$ ერთერთი $k\in\overline{1, n-1}$ ინდექსისათვის მაინც.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ

$$\begin{aligned} &f(x+h)-f(x+h(n)) = \\ &\quad = \Delta(f, J(x+h)\times[0, x_n+h_n]) - \Delta(f, J(x+h)\times[0, x_n]) \\ &\quad = \Delta(f, J(x+h)\times[x_n, x_n+h_n]) = \\ &\quad = \Delta(f, J(x)\times[x_n, x_n+h_n]) + \sum_{J\in\Omega}\Delta(f, J\times[x_n, x_n+h_n]). \end{aligned}$$

$k\in\overline{1, n-1}$-თვის აღვნიშნოთ

$$S_k(x,h) = I_1\times\cdots I_{n-1}\times[x_n, x_n+h_n],$$

სადაც

$$I_k = [x_k, x_k+h_k] \text{ და } I_j = [0,1], \text{ როცა } j\in\overline{1, n-1}\setminus\{k\}.$$

ცხადია,რომ

$$\bigcup_{j\in\Omega} J\times[x_n, x_n+h_n]\subset\bigcup_{k=1}^{n-1} S_k(x,h),$$

საიდანაც ვწერთ

$$0\le\sum_{J\in\Omega}\Delta(f, J\times[x_n, x_n+h_n])\le\sum_{k=1}^{n-1}\Delta(f, S_k(x,h)).$$

ამრიგად, გვაქვს

$$\frac{f(x+h)-f(x+h(n))}{h_n} = \alpha(x,h)+\beta(x,h),$$

სადაც

$$\alpha(x,h) = \frac{\Delta(f, J(x)\times[x_n, x_n+h_n])}{h_n}, \qquad 0\le\beta(x,h)\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Delta(f, S_k(x,h))}{h_n}.$$

დავადგინოთ, რომ

$$\lim_{\mathbb{R}_+^n \setminus L_n \ni h \to 0} \alpha(x,h)$$

არსებობს თითქმის ყველგან; და ყოველი $k \in \overline{1, n-1}$ ინდექსისათვის

$$\lim_{\mathbb{R}_+^n \setminus L_n \ni h \to 0} \frac{\Delta(f, S_k(x,h))}{h_n} = 0$$

თითქმის ყველგან.

ლემა 1.4.2-ის ძალით f -ის კერძო წარმოებული n -ური ცვლადის მიმართ $D_n f(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან. მეორეს მხრივ, $x \in (0,1)^n$, $h \in \mathbb{R}_+^n$ სადაც $h_n > 0$ და $x + h \in (0,1)^n$ პარამეტრებისათვის გვექნება

$$\alpha(x,h) = \frac{f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{h_n},$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ თითქმის ყველა $x \in (0,1)^n$ -თვის არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\mathbb{R}_+^n \setminus L_n \ni h \to 0} \alpha(x,h).$$

განვიხილოთ $k \in \overline{1, n-1}$. დავუშვათ $x \in (0,1)^n$, $h \in \mathbb{R}_+^n$, $h_n > 0$ და $x + h \in (0,1)^n$. ცხადია, $\Delta(f, S_k(x,h)) = 0$, როცა $h_k = 0$. შედეგად, $\lim \dfrac{\Delta(f, S_k(x,h))}{h_n}$ შეიძლება განხილული იქნას $\mathbb{R}_+^n \setminus (L_n \cup L_k)$ სიმრავლის გასწვრივ.

ორგანზომილებიანი ინტერვალების კლასზე G ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$G(J) = \Delta(f, I_1 \times \cdots \times I_n),$$

სადაც

$$J = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ (b_1 - a_1 > 0,\ b_2 - a_2 > 0),$$

$$I_k = [a_1, b_1] \cap [0,1],$$

$$I_n = [a_2, b_2] \cap [0,1],$$

$$I_i = [0,1], \text{ როცა } i \in \overline{1,n} \setminus \{k, n\}.$$

$f \in \mathbb{M}_n^* \subset \mathbb{H}_n$ პირობიდან გამომდინარე გვექნება: $G \in V(\mathbb{R}^2)$, საიდანაც ლემა 1.4.3-ის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ თითქმის ყოველი $t \in (0,1)^2$ წერტილისათვის

$$\lim_{J \in \mathbb{I}(t), diam J \to 0} \frac{G(J)}{\ell_2(J)} = 0,$$

აქედან კი ვღებულობთ, რომ

$$\lim_{\mathbb{R}_+^n \setminus (L_n \cup L_k) \ni h \to 0} \frac{\Delta(f, S_k(x,h))}{h_n} = \lim_{h_k \to 0+, h_n \to 0+} \frac{G([x_k, x_k + h_k] \times [x_n, x_n + h_n])}{h_n} = 0$$

თითქმის ყოველი $x \in (0,1)^n$ წერტილისათვის.

ამით დებულება დადგენილია $\mathbb{M}_n^*$ კლასის ფუნქციებისათვის.

ზოგად შემთხვევაში დებულება დავადგინოთ ინდუქციური მსჯელობით n განზომილების მიმართ.

ვთქვათ $n = 2$. ლემა 1.4.5-ის ძალით $f \in \mathbb{M}_2$ ფუნქცია შეიძლება დავშალოთ

$$f_0 + f_1 + f_2$$

ჯამის საით, სადაც

$$f_0 \in \mathbb{M}_2^*, \ f_1 \in \mathbb{M}_2(\{2\}), \ f_2 = \mathbb{M}_2(\{1\}).$$

გვექნება:

1) $f_0 \in \mathbb{M}_2^*$ პირობიდან გამომდინარე, $D_{[2]}^+ f_0(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან ;

2) ლემა 1.4.6-დან გამომდინარე, $D_{[2]}^+ f_1(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან ;

3) ცხადია, რომ $D_{[2]} f_2(x) = 0$ ყოველ $x \in (0,1)^2$ წერტილში.

ამრიგად, დებულება სამართლიანია $n = 2$ შემთხვევაში.

ახლა დავუშვათ, რომ დებულება სამართლიანია $n-1$ განზომილებისათვის, სადაც $n \geq 3$. ლემა 1.4.5-ის ძალით $f \in \mathbb{M}_n$ ფუნქცია შეიძლება დავშალოთ $\sum_{k=0}^{n} f_k$ ჯამის სახით, სადაც

$$f_0 \in \mathbb{M}_n^* \text{ და } f_k \in \mathbb{M}_n(\overline{1,n} \setminus \{k\}), \text{ როცა } k \in \overline{1,n}..$$

გვექნება:

1) $f_0 \in \mathbb{M}_n^*$ პირობიდან გამომდინარე, $D_{[n]}^+ f_0(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან ;

2) ინდუქციის დაშვებისა და ლემა 1.4.6-ის ძალით, $D_{[n]}^+ f_k(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან ნებისმიერი $k \in \overline{1, n-1}$ ინდექსისათვის;

3) ცხადია, რომ $D_{[n]} f_n(x) = 0$ ყოველი $x \in (0,1)^n$ წერტილისათვის.

ამით, დებულება და შედეგად, თეორემა 1.4.1 დამტკიცებულია.

§ 1.5. მაგალითი არცელას აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციისა, რომელსაც არსად არა აქვს ძლიერი გრადიენტი

თეორემა 1.5.1. *ნებისმიერი* $n \geq 2$ *-თვის არსებობს არცელას აზრით სასრული ვარიაციის მქონე უწყვეტი ფუნქცია* $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$*, რომელსაც არც ერთ წერტილში არა აქვს ძლიერი გრადიენტი.*

თუ გავითვალისწინებთ, რომ არცელას აზრით სასრული ვარიაციის მქონე ნებისმიერი ფუნქცია თითქმის ყველგან დიფერენცირებადია (იხ. თეორემა 1.4.A), თეორემა 1.5.1-დან მივიღებთ თეორემა 1.2.A-ს შემდეგ გაძლიერებას.

თეორემა 1.5.2. *ნებისმიერი* $n \geq 2$ *-თვის არსებობს უწყვეტი ფუნქცია* $f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$*, რომელიც თითქმის ყველა წერტილში დიფერენცირებადია, მაგრამ არც ერთ წერტილში არა აქვს ძლიერი გრადიენტი.*

შენიშვნა 1.5.1. თეორემა 1.5.1 გამოქვეყნებული იქნა [BO1], [BO3] შრომებში.

თეორემა 1.5.1-ის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება შემდეგი

ლემა 1.5.1 (იხ. [Na, თ. VIII, §2]). *ნული ზომის მქონე ნებისმიერი* $E \subset [a,b]$ *სიმრავლისათვის არსებობს უწყვეტი და ზრდადი ფუნქცია* $g:[a,b] \to R$ *, რომლის წარმოებული* $+\infty$ *-ის ტოლია* E *სიმრავლის ყოველ წერტილში.*

თეორემა 1.5.1-ის დამტკიცება. ვისარგებლოთ ლემა 1.5.A-თი და განვიხილოთ $g:[0,2] \to \mathbb{R}$ უწყვეტი და ზრდადი ფუნქცია ისეთი, რომ $g'(t) = \infty$ ყოველი რაციონალური $t \in [0,2]$ წერტილისათვის.

$f:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$f(x) = g(x_1 + x_2) \ \ (x \in [0,1]^n).$$

ცხადია, რომ f ზრდადია ყოველი ცვლადის მიმართ და შედეგად, არის სასრული ვარიაციის არცელას აზრით. ცხადია აგრეთვე, რომ f უწყვეტია.

განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in [0,1]^n$ წერტილი. $\varepsilon > 0$ და $C > 0$. $h_2 \in \mathbb{R}$ შევარჩიოთ ისე, რომ

$$|h_2| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$x_1 + x_2 + h_2 \text{ რაციონალურია,}$$

$$x_1 + x_2 + h_2 \in (0,2).$$

რადგანაც ვიცით, რომ $g'(x_1 + x_2 + h_2) = \infty$, ამიტომ მოიძებნება $h_1 \in \mathbb{R}$ შემდეგი თვისებებით:

$$|h_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\frac{g(x_1 + x_2 + h_1 + h_2) - g(x_1 + x_2 + h_2)}{h_2} > C.$$

მაშინ $h = (h_1, h_2, 0, \ldots, 0)$ სახის არგუმენტის ნაზრდისათვის გვექნება:

$$\|h\| < \varepsilon,$$

$$\frac{f(x+h) - f(x+h(1))}{h_1} > C,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{D}_{[1]} f(x) = \overline{\lim_{\mathbb{R}^n \setminus L_1 \ni h \to 0}} \frac{f(x+h) - f(x+h(1))}{h_1} = \infty .$$

აქედან, $x \in [0,1]^n$ წერტილის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასკვნით, რომ თეორემა დამტკიცებულია.

თავი II

განზოგადებული გრადიენტის არსებობისა და დიფერენცირებადობის პირობების შედარების შესახებ

§2.1. განზოგადებული გრადიენტის წარმომქმნელი ბაზისის ცნება. ბაზისების შედარების ამოცანა

1. განზოგადებული გრადიენტის წარმომქმნელი ბაზისის ცნება. გამოვიყენოთ პირველი თავის მეორე პარაგრაფში შემოღებული აღნიშვნები: $h\in\mathbb{R}^n$ ვექტორისათვის და $i\in\overline{1,n}$ ინდექსისათვის $h(i)$ აღნიშნავს იმ ვექტორს $\mathbb{R}^n$ სივრციდან, რომლისთვისაც $h(i)_j=h_j$, როცა $j\in\overline{1,n}\setminus\{i\}$ და $h(i)_i=0$. L_i ($i\in\overline{1,n}$) აღნიშნავს $\{h\in\mathbb{R}^n:\ h_i=0\}$ ჰიპერსიბრტყეს.

Π_i $\left(i\in\overline{1,n}\right)$ -თი აღვნიშნოთ ყველა $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ სიმრავლის კლასი, რომელსაც აქვს თვისებები: $\Delta\bigcap L_i=\varnothing$ და კოორდინატთა სათავე 0 არის Δ სიმრავლის ზღვარითი წერტილი.

ვთქვათ $i\in\overline{1,n}$, $\Delta\in\Pi_i$ და f არის $x\in\mathbb{R}^n$ წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრული ფუნქცია. ზღვარს

$$\lim_{\Delta\ni h\to 0}\frac{f(x+h)-f\left(x+h(i)\right)}{h_i},$$

მისი არსებობის შემთხვევაში, ვუწოდოთ f ფუნქციის (i,Δ)-კერძო წარმოებული x წერტილში და იგი აღვნიშნოთ $D_{i,\Delta}f(x)$ სიმბოლოთი.

განზოგადებული გრადიენტის წარმომქმნელი ბაზისი (მოკლედ, ბაზისი) ვუწოდოთ n-ეულს $\Delta=\left(\Delta_1,\cdots,\Delta_n\right)$, სადაც $\Delta_i\in\Pi_i$ ყოველი $i\in\overline{1,n}$-თვის.

თუ $\Delta=\left(\Delta_1,\cdots,\Delta_n\right)$ ბაზისისათვის f ფუნქციას ყოველი $i\in\overline{1,n}$ ინდექსისათვის აქვს $\left(i,\Delta_i\right)$-წარმოებული x წერტილში, მაშინ ვიტყვით, რომ f ფუნქციას x წერტილში აქვს განზოგადებული გრადიენტი Δ ბაზისის მიმართ(მოკლედ, აქვს Δ-გრადიენტი).

ბაზისის მიმართ განზოგადებული გრადიენტის ცნება წარმოადგენს ო. ძაგნიძის [Dz1] მიერ შემოღებული ძლიერი და კუთხური გრადიენტების ცნებათა უშუალო განზოგადებას.

2. $\Delta(\alpha)$ „კუთხური“ ბაზისების შკალა. მოკლედ მიმოვიხილოთ ბაზისების ცნობილი მაგალითები და მათი თვისებები. ამ მიმართულებით საკმაოდ ამომწურავი ინფორმაცია მოცემულია ო. ძაგნიძის [Dz2] და [Dz3] მონოგრაფიებში.

$0 \le \alpha < \pi/2$ კუთხისათვის $\Delta(\alpha)$ -თი აღვნიშნოთ α გაშლის კუთხეებით წარმოქმნილი ბაზისი, სახელდობრ ბაზისი, რომლისთვისაც

$$\Delta(\alpha)_i = \left\{ h \in \mathbb{R}^n : \frac{\max\limits_{j \ne i} |h_j|}{|h_i|} \le tg\alpha \right\} \quad \left(i \in \overline{1,n}\right).$$

ცხადია, $\alpha = 0$ შემთხვევაში $\Delta(0)$ გვაძლევს $\left(Ox_1 \setminus \{0\}, \cdots, Ox_n \setminus \{0\}\right)$ n-ეულს.

$\alpha = \pi/2$ შემთხვევაში $\Delta(\pi/2)$ ბაზისი განისაზღვრება როგორც $\left(\mathbb{R}^n \setminus L_1, \cdots, \mathbb{R}^n \setminus L_n\right)$ n-ეული.

2.1.1-2.1.3 ნახაზებზე აღწერილია $\Delta(0)$, $\Delta(\alpha)$ $(0 < \alpha < \pi/2)$ და $\Delta(\pi/2)$ ბაზისები ორგანზომილებიან შემთხვევაში.

$\Delta(\alpha)$ ბაზისებს შორის ცალცალკე გამოვყოთ „საწყისი“ - $\Delta(0)$, „შუალედური“ - $\Delta(\alpha)$ $(0 < \alpha < \pi/2)$ და „საბოლოო“ - $\Delta(\pi/2)$ შემთხვევები.

შევნიშნოთ, რომ: $\Delta(0)$ ბაზისი წარმოქმნის ჩვეულებრივ გრადიენტს, ანუ ჩვეულებრივი კერძო წარმოებულების არსებობის პირობას; $\Delta(\pi/2)$ გრადიენტი კი, წარმოადგენს ძლიერ გრადიენტს.

სხვა რა არის ცნობილი $\Delta(\alpha)$ ბაზისების შესახებ? შევნიშნავთ, რომ უპირველესად ჩვენ დაინტერესებული ვართ $\Delta(\alpha)$ გრადიენტისა და დიფერენცირებადობის პირობების ურთიერთმიმართებით. ამ მიმართულებით ცნობილია შემდეგი საინტერესო შედეგები:

4) $\Delta(0)$ *-გრადიენტის (ანუ ჩვეულებრივი გრადიენტის) არსებობის პირობა არსებითად უფრო სუსტია ვიდრე დიფერენცირებადობის პირობა; დადებითი ზომის სიმრავლეზე* (ტოლსტოვი [To,§4]);
5) $\Delta(\alpha)$ *-გრადიენტის არსებობის პირობა ტოლფასია დიფერენცირებადობის პირობის* $\frac{\pi}{4} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ *კუთხეებისათვის* (ო. ძაგნიძე [Dz1]);

6) $\Delta(\pi/2)$ *-გრადიენტის(ანუ ძლიერი გრადიენტის) არსებობის პირობა არსებითად უფრო ძლიერია ვიდრე დიფერენცირებადობის პირობა* (გ.გ.ონიანი [O2], იხ. თეორემა1.2. A).

ამრიგად, ზღვრულ - $\Delta(0)$ და $\Delta(\pi/2)$ შემთხვევებში, ვღებულობთ, შესაბამისად, არსებითად უფრო სუსტ და არსებითად უფრო ძლიერ პირობებს ვიდრე დიფერენცირებადობაა; ხოლო შუალედურ შემთხვევათა „მეორე ნახევარი" - $\Delta(\alpha)$ $(\pi/4 \le \alpha < \pi/2)$ ბაზისები, იძლევიან დიფერენცირებადობის ტოლფას პირობას.

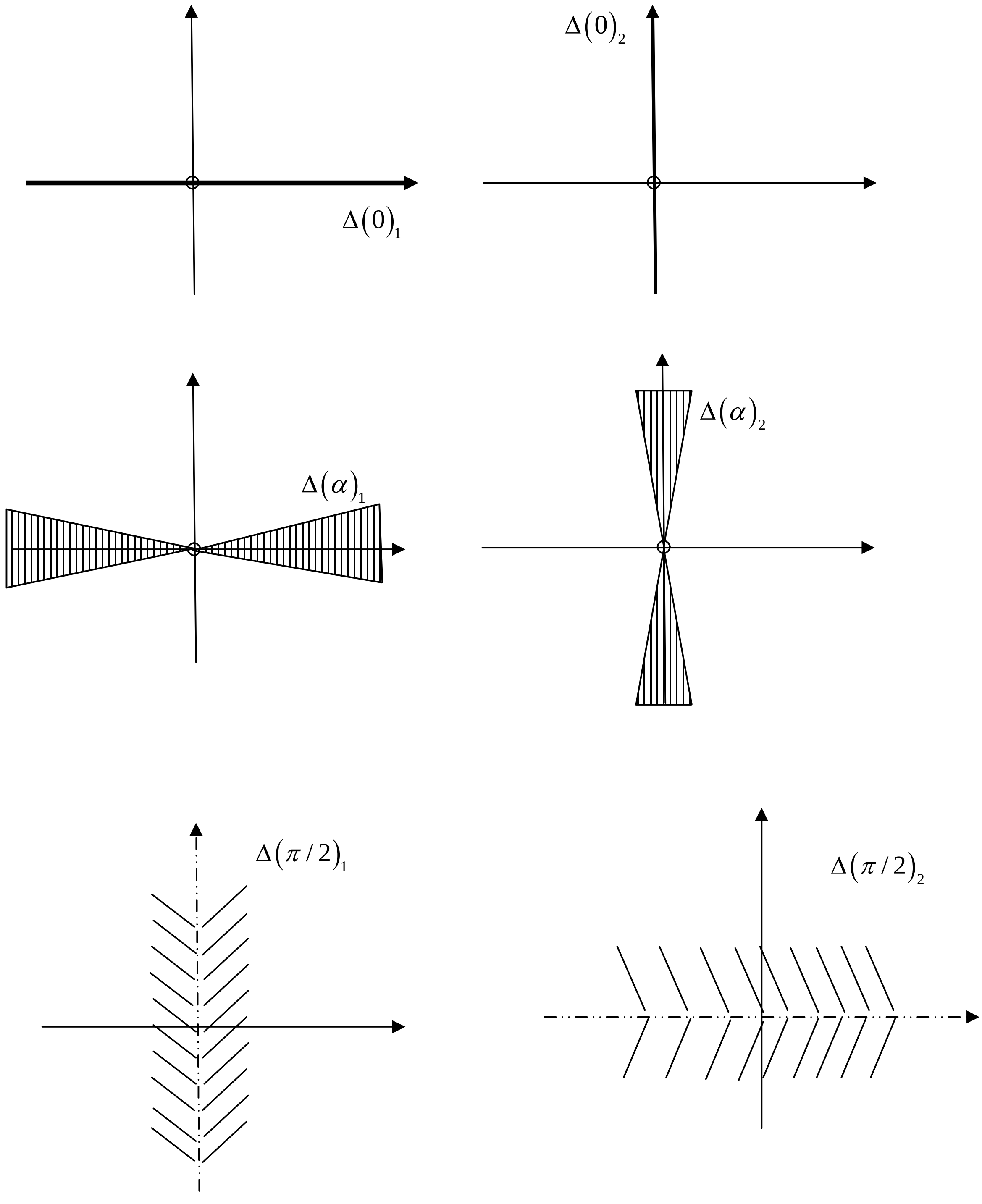
3. ბაზისთა შედარების ამოცანა. ისმის კითხვები:

1) საზოგადოდ როდისაა Δ -გრადიენტის არსებობის პირობა დიფერენცირე–ბადობის პირობის ტოლფასი? კერძოდ, შუალედურ შემთხვევათა „პირველი ნახევარი" - ანუ $\Delta(\alpha)$ $(0 < \alpha < \pi/4)$ ბაზისები იძლევიან თუ არა დიფერენცირებადობის ტოლფას პირობას?
2) როდისაა Δ -გრადიენტის არსებობის პირობა არსებითად უფრო ძლიერი ვიდრე დიფერენცირებადობა?
3) როდისაა Δ -გრადიენტის არსებობის პირობა არსებითად უფრო სუსტი ვიდრე დიფერენცირებადობის პირობა? კერძოდ, არის თუ არა $\Delta(\alpha)$ -გრადიენტის $(0 < \alpha < \pi/4)$ არსებობის პირობა არსებითად უფრო სუსტი ვიდრე დიფერენცირებადობა?

იგივე ტიპის კითხვები შეიძლება დავსვათ თუ ზოგად Δ ბაზისს შევადარებთ კუთხური ბაზისების ზღვრულ შემთხვევებთან, ანუ გრადიენტისა და ძლიერი გრადიენტის არსებობის პირობებთან.

საზოგადოდ საკითხი შეიძლება დავსვათ ნებისმიერი ორი - Δ და Ω ბაზისებისათვის, რაც გულისხმობს მათ მიერ წარმოქმნილი გრადიენტების არსებობის პირობების წერტილოვანი და დადებითი ზომის სიმრავლეებზე შედარებას.

მომდევნო პარაგრაფებში განხილული იქნება ბაზისთა შედარების ამოცანის ზოგიერთი ასპექტი.


$\Delta(0)_2$
$\Delta(0)_1$
$\Delta(\alpha)_2$
$\Delta(\alpha)_1$
$\Delta(\pi/2)_1$
$\Delta(\pi/2)_2$

ნახ. 2.1.1

§2.2. ბაზისის მიმართ განზოგადებული გრადიენტის არსებობისა და დიფერენცირებადობის პირობების შედარება

1. ზოგიერთი აღნიშვნა და განმარტება. ვთქვათ $\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_2)$ რაიმე ბაზისია. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც არსებობს f -ის $\Delta-$ გრადიენტი, აღვნიშნოთ $E_\Delta(f)$ -ით, ხოლო ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f ფუნქცია დიფერენცირებადია, აღვნიშნოთ $E_D(f)$-ით.

აღვნიშნოთ აგრეთვე:

$$\|h\| = \max\{|h_1|, ..., |h_n|\} \ \left(h \in \mathbb{R}^n\right),$$

$$\mathrm{I}(r) = \left\{h \in \mathbb{R}^n : h \neq 0, \|h\| < r\right\} \ (r > 0),$$

$$\mathrm{I}(x, r) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\right\} \ \left(x \in \mathbb{R}^n, \, r > 0\right),$$

$$\overline{M} = M \bigcup \partial M \quad \left(M \subset \mathbb{R}^n\right).$$

$\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_n)$ ბაზისს ვუწოდოთ რეგულარული, თუ არსებობს $r > 0$ და $0 < \alpha < \pi / 2$ ისეთები, რომ $\Delta_1 \bigcap \mathrm{I}(r) \subset \Delta(\alpha)_1$,....... . ..., $\Delta_n \bigcap \mathrm{I}(r) \subset \Delta(\alpha)_n$.

$\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_n)$ ბაზისს ვუწოდოთ სრული, თუ არსებობს $r > 0$ ისეთი, რომ $\mathrm{I}(r) \subset \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n$.

$\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_n)$ ბაზისისათვის $\overline{\Delta}$ -ით აღვნიშნოთ მისი “ჩაკეტვა” - $\overline{\Delta} = \left(\overline{\Delta}_1 \setminus L_1, ..., \overline{\Delta}_n \setminus L_n\right)$ ბაზისი.

2. საკითხის დასმა და შედეგები. ვთქვათ $\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_n)$ რაიმე ბაზისია. როდისაა Δ -გრადიენტის არსებობის პირობა დიფერენცირებადობის პირობის ტოლფასი? საზოგადოდ, რა მიმართებაშია ერთმანეთთან ფიქსირებულ წერტილში Δ -გრადიენტის არსებობისა და დიფერენცირებადობის პირობები?

ქვემოთ მოყვანილი თეორემები იძლევიან დასმული საკითხის სრულ გადაწყვეტას როგორც ნებისმიერი, ასევე უწყვეტი, ფუნქციების კლასისათვის.

თეორემა 2.2.1. *იმისათვის, რომ Δ -გრადიენტის არსებობა იწვევდეს დიფერენცირებადობას (ანუ ყოველი $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის სრულდებოდეს პირობა $E_\Delta(f) \subset E_D(f)$) აუცილებელი და საკმარისია, რომ Δ იყოს სრული.*

თეორემა 2.2.2. *იმისათვის, რომ ყოველი უწყვეტი ფუნქციისათვის Δ-გრადიენტის არსებობა იწვევდეს დიფერენცირებადობას (ანუ ყოველი უწყვეტი $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის სრულდებოდეს პირობა $E_\Delta(f) \subset E_D(f)$) აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\overline{\Delta}$ იყოს სრული.*

თეორემა 2.2.3. *თუ Δ რეგულარულია, მაშინ დიფერენცირებადობა იწვევს Δ-გრადიენტის არსებობას (ანუ ყოველი $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ -თვის სრულდება პირობა $E_D(f) \subset E_\Delta(f)$).*

თეორემა 2.2.4. *თუ Δ არარეგულარულია, მაშინ დიფერენცირებადობა არ იწვევს Δ -გრადიენტის არსებობას, უფრო მეტიც, არსებობს უწყვეტი ფუნქცია $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ისეთი, რომ $E_D(f) \setminus E_\Delta(f) \neq \varnothing$.*

აღნიშნული თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულებები.

შედეგი 2.2.1. *იმისათვის, რომ Δ -გრადიენტის არსებობის პირობა დიფერენცირებადობის პირობის ტოლფასი იყოს (ე.ი. ყოველი $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ -თვის სრულდებოდეს ტოლობა $E_D(f) = E_\Delta(f)$) აუცილებელია და საკმარისი, რომ Δ იყოს რეგულარული და სრული.*

შედეგი 2.2.2. *იმისათვის, რომ უწყვეტ ფუნქციათა კლასში Δ -გრადიენტის არსებობის პირობა დიფერენცირებადობის პირობის ტოლფასი იყოს (ე.ი. ყოველი უწყვეტი $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის სრულდებოდეს ტოლობა $E_D(f) = E_\Delta(f)$) აუცილებელია და საკმარისი, რომ Δ იყოს რეგულარული და $\overline{\Delta}$ იყოს სრული.*

შენიშვნა 2.2.1. 2.4.1-2.4.4 თეორემები გამოქვეყნებული იქნა [Ba1] ნაშრომში.

3. თეორემების დამტკიცება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორგანზომილებიანი შემთხვევა.

ლემა 2.2.1. *ვთქვათ* $\mathrm{I}(x_n, r_n)$ *წყვილწყვილად თანაუკვეთი კვადრატების მიმდევრობაა,* $\alpha_n > 0 \ (n \in \mathbb{N})$ *და* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. *მაშინ არსებობს* $f \in C(\mathbb{R}^2)$ *ფუნქცია ისეთი, რომ*

$$f(x_n) = \alpha_n \ (n \in \mathbb{N}),$$

$$0 \le f(x) \le \alpha_n, \ (n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathrm{I}(x_n, r_n)),$$

$$f(x) = 0 \quad \left(x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}(x_n, r_n) \right).$$

დამტკიცება. $A \subset \mathbb{R}^2$-თვის χ_A იყოს A სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია. $n \in \mathbb{N}$-თვის აღვნიშნოთ

$$f_n(y) = \frac{\alpha_n}{r_n} \chi_{\mathrm{I}(x_n, r_n)}(y) \cdot \left(r_n - \|x_n - y_n\| \right).$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს საჭირო პირობებს. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.2.1-ის დამტკიცება. აუცილებლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ყოველი $r > 0$-თვის

$$\mathrm{I}(r) \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2) \neq \varnothing.$$

(h_n) მიმდევრობა შევარჩიოთ ისე, რომ

$$h_n \neq h_m \ (n \neq m),$$

$$h_n \in \mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right) \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2) \ (n \in \mathbb{N}).$$

განვიხილოთ f ფუნქცია, რომელიც h_n წერტილებში ღებულობს $\|h_n\|$-ის ტოლ მნიშვნელობებს, ხოლო დანარჩენ წერტილებში 0-ის ტოლია.

ცხადია, თუ $i \in \overline{1,2}$ და $h \in \Delta_i$, მაშინ $f(h) = f(h(i)) = 0$. აქედან გამომდინარე

$$(0,0) \in E_\Delta(f).$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$(0,0) \notin E_D(f).$$

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $(0,0) \in E_D(f)$, მაშინ

$$f(h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \alpha(h),$$

სადაც A_1 და A_2 რაიმე რიცხვებია და $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0$. ვთქვათ $i, j \in \overline{1,2}$ და $i \neq j$. რადგან $f(h(i)) = 0$, ამიტომ

$$0 = \frac{f(h(i))}{h_j} = \frac{A_j h_j + \alpha(h(i))}{h_j} = A_j + \frac{\alpha(h(i))}{h_j}.$$

აქედან გამომდინარე, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha(h(i))}{h_j} = 0$ პირობის გათვალისწინებით, ვასკვნით, რომ $A_j = 0$. შედეგად $f(h) = \alpha(h)$, რაც გვაძლევს წინააღმდეგობას $f(h_n) = \|h_n\|$ $(n \in \mathbb{N})$ პირობასთან. ე.ი. $(0,0) \notin E_\Delta(f)$. ამით აუცილებლობა დადგენილია.

საკმარისობა. განვიხილოთ $r > 0$ ისეთი, რომ

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \supset I(r).$$

ვთქვათ $h \in I(r)$. თუ $h \in \Delta_1$, მაშინ $f(x+h) - f(x)$ ნაზრდი წარმოვადგინოთ სახით

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = \big[f(x+h) - f(x+h(1)) \big] + \\ + \big[f(x+h(1)) - f(x) \big], \end{aligned}$$

ხოლო, თუ $h \notin \Delta_1$ და $h \in \Delta_2$, მაშინ შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = \big[f(x+h) - f(x+h(2)) \big] + \\ + \big[f(x+h(2)) - f(x) \big]. \end{aligned}$$

აღნიშნული წარმოდგენებისა და D_{1,Δ_1} და D_{2,Δ_2} წარმოებულების განმარტების გათვალისწინებით მარტივად ვასკვნით, რომ

$$f(x+h)-f(x)=D_{1,\Delta_1}f(x)h_1+D_{2,\Delta_2}f(x)h_2+o(h),$$

რაც ნიშნავს f -ის დიფერენცირებადობას x წერტილში. ამით საკმარისობა დადგენილია.

თეორემა 2.2.2-ის დამტკიცება. აუცილებლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ყოველი $r>0$ -თვის

$$\mathrm{I}(r)\setminus[(\bar{\Delta}_1\setminus L_1)\cup(\bar{\Delta}_2\setminus L_2)]\neq\varnothing.$$

(h_n) მიმდევრობა შევარჩიოთ ისე, რომ

$$h_n\neq h_m \quad (n\neq m),$$

$$h_n\in\mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right)\setminus[(\bar{\Delta}_1\setminus L_1)\cup(\bar{\Delta}_2\setminus L_2)] \ (n\in\mathbb{N}).$$

$r_n>0 \ (n\in\mathbb{N})$ მიმდევრობა შევარჩიოთ ისე, რომ

$$\mathrm{I}(h_n,r_n)\subset\mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right)\setminus[(\bar{\Delta}_1\setminus L_1)\cup(\bar{\Delta}_2\setminus L_2)],$$

$$\mathrm{I}(h_n,r_n)\bigcap\mathrm{I}(h_m,r_m)=\varnothing \ (n\neq m).$$

f იყოს ლემა 2.2.1-ის მიხედვით შერჩეული ფუნქცია, რომელიც შეესაბამება $(\mathrm{I}(h_n,r_n))$ და $(\|h_n\|)$ მიმდევრობებს.

ვთქვათ $i\in\overline{1,2}$ და $h\in\Delta_i$. მაშინ $h\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}(h_n,r_n)$ პირობის გამო:

$$f(h)=0.$$

$r_n\leq\min\{|h_{n,1}|,|h_{n,2}|\}$ შეფასების გამო:

$$h(i)\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}(h_n,r_n),$$

რის შედეგადაც,

$$f\left(h(i)\right)=0.$$

ამრიგად,

$$f(h)-f\left(h(i)\right)=0\ \left(i\in\overline{1,2}\right).$$

აქედან გამომდინარე

$$(0,0)\in E_{\Delta}(f).$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$(0,0)\notin E_{D}(f).$$

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $(0,0)\in E_{D}(f)$, მაშინ

$$f(h)=A_1h_1+A_2h_2+\alpha(h),$$

სადაც A_1, A_2 რაიმე რიცხვებია და $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{\|h\|}=0$. ცხადია $f\left(h-h(1)\right)=0$. შედეგად,

$$0=\frac{f\left(h-h(1)\right)}{h_1}=A_1+\frac{\alpha\left(h-h(1)\right)}{h_1}.$$

ვიცით, რომ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha\left(h-h(1)\right)}{h_1}=0$, რის გამოც $A_1=0$. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $A_2=0$. ამრიგად,

$$f(h)=\alpha(h),$$

მაგრამ მეორეს მხრივ,

$$f(h_n)=\|h_n\|\ (n\in\mathbb{N}),$$

რაც გვაძლევს წინააღმდეგობას. ე.ი. $(0,0)\notin E_{D}(f)$. აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობა. თეორემა 2.2.2-ის საკმარისობის დამტკიცება ისეთივეა, როგორც თეორემა 2.2.1-ის შემთხვევაში, ოღონდ დამატებით გვჭირდება იმის გათვალისწინება, რომ ყოველი $f\in C\left(\mathbb{R}^2\right)$-თვის სრულდება ტოლობა $E_{\bar{\Delta}}(f)=E_{\Delta}(f)$.

თეორემა 2.2.3-ის დამტკიცება. ვთქვათ Δ რეგულარულია, ე.ი. არსებობენ $r>0$ და $0<\alpha<\pi/2$ ისეთები, რომ $\Delta_1 \bigcap \mathrm{I}(r) \subset \Delta(\alpha)_1$ და $\Delta_2 \bigcap \mathrm{I}(r) \subset \Delta(\alpha)_2$.

დავუშვათ $x \in E_D(f)$. მაშინ

$$f(x+h) = f(x) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \alpha(h),$$

სადაც A_1 და A_2 h-საგან დამოუკიდებელი მუდმივებია და $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha(h)}{\|h\|}=0$. გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x+h(1)) &= \\ -f(x+h(1)) &+ f(x) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \alpha(h) \\ &= A_1 h_1 + \alpha(h) - \alpha(h(1)) \end{aligned}$$

თუ $h \in \Delta(\alpha)_1$, მაშინ

$$\frac{\|h\|}{|h_1|} \le tg\alpha + 1.$$

რის გამოც

$$\lim_{\Delta_1 \ni h \to 0} \frac{\alpha(h) - \alpha(h(1))}{h_1} = 0.$$

რადგან

$$\frac{f(x+h) - f(x+h(1))}{h_1} = A_1 + \frac{\alpha(h) - \alpha(h(1))}{h_1},$$

ამიტომ

$$\lim_{\Delta_1 \ni h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x+h(1))}{h_1} = A_1.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{\Delta_2 \ni h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x+h(1))}{h_2} = A_2.$$

მაშასადამე $x \in E_\Delta(f)$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.2.4-ის დამტკიცება. დავუშვათ Δ არარეგულარულია, ე.ი. ნებისმიერი $r>0$ და $0<\alpha<\pi/2$ რიცხვებისათვის

$$\left(\Delta_1 \cap \mathrm{I}(r)\right) \setminus \Delta(\alpha)_1,\ \left(\Delta_2 \cap \mathrm{I}(r)\right) \setminus \Delta(\alpha)_2$$

სიმრავლეებიდან ერთ-ერთი მაინც არაცარიელია. ცხადია არსებობს $i \in \overline{1,2}$ ისეთი, რომ ყოველი $r>0$ და $k>0$ -თვის $\left(\Delta_i \cap \mathrm{I}(r)\right) \setminus \Delta(\alpha)_i \neq \varnothing$. ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ ასეთია $i=1$. (h_n) და (r_n) მიმდევრობები შევარჩიოთ ისე, რომ

$$h_n \in \left(\Delta_1 \cap \mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \setminus \Delta(\alpha)_1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\mathrm{I}(h_n, r_n) \subset \mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right) \setminus \Delta(\alpha)_1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\mathrm{I}(h_i, r_i) \cap \mathrm{I}(h_j, r_j) = \varnothing \quad (i \neq j),$$

$$r_n < \frac{1}{2}\|h_n\| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ლემა 2.2.1-ის ძალით არსებობს $f \in C(\mathbb{R}^2)$ ისეთი, რომ

$$f(h_n) = \frac{1}{n}\|h_n\| \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\|h_n\|}{n} \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathrm{I}(h_n, r_n)),$$

$$f(x) = 0 \quad \left(x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}(h_n, r_n)\right).$$

ვაჩვენოთ, რომ $(0,0) \in E_D(f)$. მართლაც, თუ $h \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}(h_n, r_n)$, მაშინ

$$f(h) = 0,$$

ხოლო, თუ $h \in \mathrm{I}(h_j, r_j)$ რომელიმე $j \in \mathbb{N}$-თვის, მაშინ

$$\frac{f(h)}{\|h\|} \le \frac{\|h_j\|}{j\|h\|} < \frac{2}{j}.$$

შედეგად,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{\|h\|} = 0.$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ (0,0) წერტილში f ფუნქციის დიფერენციალი ნულის ტოლია, კერძოდ, $(0,0)\in E_D(f)$. მეორეს მხრივ, გვაქვს

$$\frac{f\left(h_n - f\left(h_n(1)\right)\right)}{|h_{n,1}|} = \frac{f(h_n)}{|h_{n,1}|} = \frac{\|h_n\|}{n|h_{n,1}|} \ge 1,$$

საიდანაც, იმის გათვალისწინებით, რომ (0,0) წერტილში f ფუნქციის დიფერენციალი ნულის ტოლია, გამომდინარეობს, რომ არ არსებობს $D_{1,\Delta_1} f(0,0)$. ამრიგად, დავადგინეთ, რომ $(0,0)\notin E_{\Delta}(f)$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§2.3. ბაზისის მიმართ განზოგადებული გრადიენტის არსებობისა და დიფერენცირებადობის პირობების შედარება დადებითი ზომის სიმრავლეებზე

1. საკითხის დასმა და შედეგი. 2.2.1 და 2.2.3 თეორემებიდან გამომდინარე, თუ Δ ბაზისი სრულია და დამატებით ცნობილია, რომ Δ უშვებს არგუმენტის ნაზრდის ანიზოტროპულ (ანუ მხებით) მიახლოებას ნულთან, მაშინ Δ-გრადიენტის არსებობის პირობა დიფერენცირებადობის პირობაზე უფრო ძლიერია. ვიცით აგრეთვე, რომ (იხ. თეორემა 1.1.A), თუ $\Delta(\pi/2)$ ბაზისი სახით საქმე გვაქვს ძლიერ გრადიენტთან, ანუ იმ შემთხვევასთან როცა ნაზრდის ანიზოტროპულობა შეუზღუდავია, მაშინ ვღებულობთ არსებითად უფრო ძლიერ პირობას ვიდრე დიფერენცირებადობაა.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ ანიზოტროპულობის რა მახასიათებელი იწვევს დიფერენცირობადობაზე არსებითად ძლიერი პირობის წარმოქმნას.

ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ თეორემას, რომელიც გვიჩვენებს, რომ დიფერენცირებადობის პირობის არსებითი გაძლიერებისათვის საკმარის თვისებას წარმოადგენს ნაზრდების სიმრავლის(ბაზისის) „ანიზოტროპული სიმკვრივე“ ზომის თვალსაზრისით.

მოვიყვანოთ საჭირო განმარტებები. $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ ინტერვალისათვის აღვნიშნოთ

$$r_i(I) = \frac{\max\limits_{j \neq i} |I_j|}{|I_i|} \qquad \left(i \in \overline{1,n}\right).$$

$E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ვუწოდოთ 0 წერტილში ანიზოტროპულად მკვრივი i-ური ცვლადის მიხედვით, თუ მოიძებნება $\alpha > 0$ რიცხვი და n-განზომილებიანი ინტერვალების $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ მიმდევრობა შემდეგი თვისებებით:

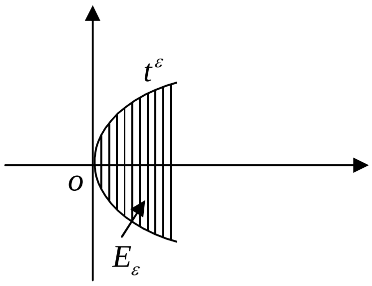
$$diam\, I_k \to 0 \quad (k \to \infty),$$

$$0 \text{ არის } I_k\text{-ს ცენტრი } (k \in \mathbb{N}),$$

$$r_i(I_k)\to\infty \quad (k\to\infty),$$

$$\frac{|E\cap I_k|}{|I_k|}\ge\alpha \quad (k\in\mathbb{N}).$$

შენიშვნა 2.3.1. ორგანზომილებიან შემთხვევაში პირველი ცვლადის მიმართ 0-ში ანიზოტროპულად მკვრივია ნებისმიერი ამოზნექილი სიმრავლე, რომლის საზღვარზე ძევს 0 და რომელსაც 0-ში მხებად აქვს Ox_2 ღერძი. კერძოდ, ასეთია $E_\varepsilon=\{(t,\tau):t>0,\ 0\le|\tau|\le t^\varepsilon\}$ სიმრავლე ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,1)$ -თვის (იხ. ნახ. 2.3.1)



ნახ. 2.3.1.

$\Delta=(\Delta_1,\cdots,\Delta_n)$ ბაზისს ვუწოდოთ ანიზოტროპულად მკვრივი, თუ მის Δ_i კომპონენტებს შორის ერთერთი მაინც ანიზოტროპულად მკვრივია 0 წერტილში შესაბამისი i -ური ცვლადის მიხედვით.

თეორემა 2.3.1. *თუ Δ ბაზისი ანიზოტროპულად მკვრივია, მაშინ არსებობს უწყვეტი ფუნქცია $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ისეთი, რომ*

1) f დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან,

2) f არა აქვს Δ -გრადიენტი თითქმის არსად.

შენიშვნა 2.3.2. f ფუნქცია აგებული იქნება ისე, რომ 2) პირობა შესრულდება შემდეგ კონტექსტში: $\overline{\lim\limits_{\Delta_i\ni h\to 0}}\dfrac{f(x+h)-f(x+h(i))}{h_i}=\infty$ თითქმის ყველგან, სადაც i წინასწარ დასახელებული ინდექსია, რომლისთვისაც Δ ბაზისის Δ_i კომპონენტი ანიზოტროპულად მკვრივია 0 წერტილში i -ური ცვლადის მიხედვით.

შედეგი. 2.3.1. *თუ Δ ბაზისი სრულია და ანიზოტროპულად მკვრივი, მაშინ Δ -გრადიენტის არსებობის პირობა არსებითად ძლიერია ვიდრე დიფერენცირებადობის პირობა.*

2. თეორემის დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ აგება ხდება გ.გ. ონიანის [O2] სქემის მოდიფიკაციით. სქემის ცვლილება უკავშირდება კონსტრუქციაში პარამეტრების შერჩევისას არსებულ შეზღუდვებს, ასევე, განსაკუთრებულობის გამკვრივებისას დამატებით საჭირო ხდება ძვრების შესახებ ა. კალდერონის ლემის გამოყენება.

სიმარტივისათვის მსჯელობა წარვმართოთ ორგანზომილებიან შემთხვევაში.

შემდგომში ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ Δ_1 არის ანიზოტროპულად მკვრივი ნულში $0<\alpha\le 1$ პარამეტრით.

სიმარტივისათვის გავაკეთოთ კიდევ ერთი შეთანხმება. ვთქვათ (I_k) ინტერვალების მიმდევრობაა Δ_1 სიმრავლის ანიზოტროპული მკვრივობის თვისებიდან. $I_k^{(p)}$ -თი $\left(p\in\overline{1,4}\right)$ აღვნიშნოთ შესაბამის საკოორდინატო მეოთხედთან I_k ინტერვალის თანაკვეთა. ცხადია მოიძებნება $p\in\overline{1,4}$ ისეთი, რომ

$$\frac{\left|I_k^{(p)}\bigcap\Delta_1\right|}{\left|I_k^{(p)}\right|}\ge\alpha$$

k ნომერთა უსასრულო რაოდენობისათვის. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ აღნიშნული სრულდება $p=1$ შემთხვევაში, ანუ პირველი საკოორდინატო მეოთხედისთვის.

შემოვიღოთ შემდეგი სამი მაქსიმალური ოპერატორი. უწყვეტი $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ფუნქციისათვის, $x\in\mathbb{R}^2$ წერტილისათვის და $0<\delta<\eta$ რიცხვებისათვის განვსაზღვროთ:

$$M(f)(x)=\sup_{h\neq 0}\frac{\left|f(x+h)-f(x)\right|}{\|h\|},$$

$$S_\eta(f)(x)=\sup_{h\in\Delta_1,\|h\|<\eta}\left|\frac{f(x+h)-f\left(x+h(1)\right)}{h_1}\right|,$$

$$S_{\delta,\eta}(f)(x)=\sup_{h\in\Delta_1,\|h\|<\eta,|h_1|>\delta}\left|\frac{f(x+h)-f\left(x+h(1)\right)}{h_1}\right|.$$

ძირითადი აგება. ვთქვათ $k\in\mathbb{N}$. განვიხილოთ $0<t_1(k)<t_2(k)$ რიცხვები ისეთები, რომ:

$t_1(k)$ და $t_2(k)$ არიან $\frac{1}{2^m}$ $(m \in \mathbb{N})$ სახის რიცხვები,

$$\frac{t_2(k)}{t_1(k)} \geq 2^{5k+2},$$

$$t_2(k) \leq \frac{1}{2^k},$$

$$\frac{|\Delta_1 \cap I_k|}{|I_k|} \geq \alpha\,, \quad \text{სადაც } I_k = \left[0, t_1(k)\right] \times \left[0, t_2(k)\right].$$

ასეთი $t_1(k)$ და $t_2(k)$ რიცხვების არსებობა გამომდინარეობს Δ_1-ის ანიზოტროპულად მკვრივობასთან დაკავშირებული დაშვებიდან.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$t(k) = \left(t_1(k), t_2(k)\right);$$

$$B_k = B\left[t(k), \frac{\alpha t_1(k)}{2}\right],$$

ანუ B_k არის ჩაკეტილი წრე ცენტრით $t(k)$-ში, რადიუსით $\frac{\alpha t_1(k)}{2}$;

$$\tilde{B}_k = B\left[t(k), 2^{2k+1} t_1(k)\right].$$

უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\operatorname{supp} f_k \subset B_k,$$

$$f_k\left(t(k)\right) = 2^k t_1(k),$$

$$0 \leq f_k(x) \leq 2^k t_1(k) \quad \left(x \in B_k\right).$$

f_k ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისებები:

$$1) \left\{ M(f_k) > \frac{1}{2^k} \right\} \subset \tilde{B}_k\,;$$

$$2)\quad \left|\left\{S_{2t_1(k)}(f_k) > 2^k\right\} \cap I_k\right| \ge \frac{\alpha}{2}|I_k|.$$

რა არის მოყვანილი აგების არსი? ის გვაძლევს „ელემენტარული“ განსაკუთრებულობის მქონე ფუნქციას, რომელთა კომბინირებით (ანუ განსაკუთრებულობათა გამკვრივებით) შემდგომში მივიღებთ რეზონანსს სასურველი თვისებების მქონე ფუნქციის სახით. f_k ფუნქციის განსაკუთრებულობა გამოიხატება იმაში, რომ :

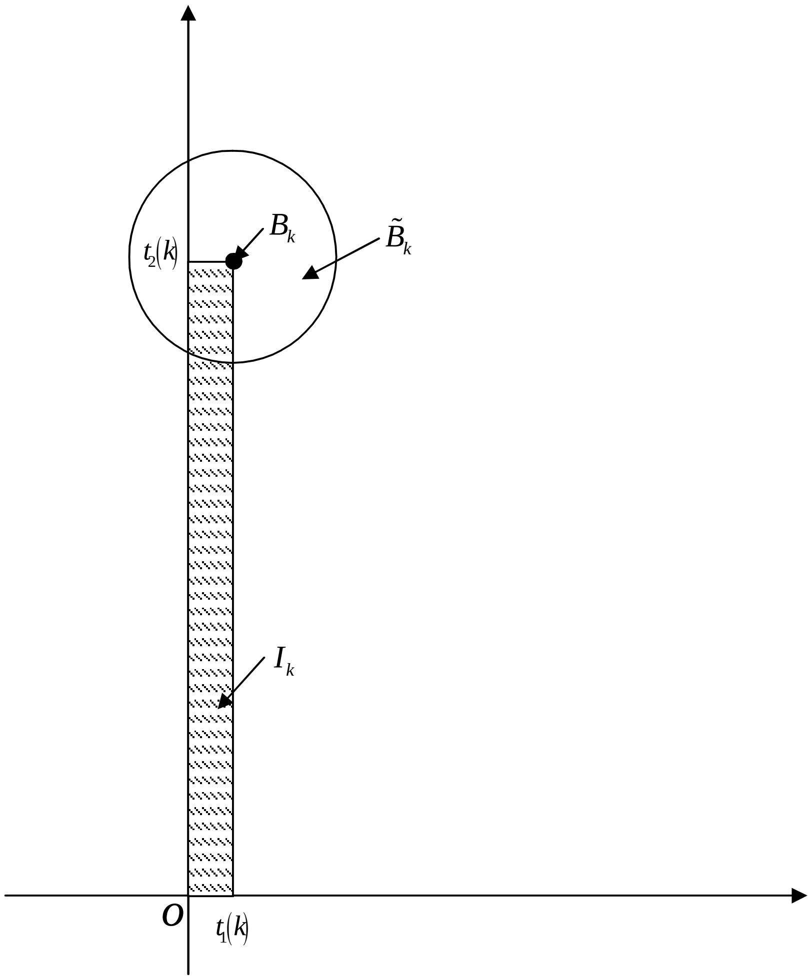
1) დიფერენცირებადობის თვალსაზრისით ყოფაქცევის განმსაზღვრელი $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\|h\|}\right|$ გამოსახულება მცირეა ($\frac{1}{2^k}$ -ზე ნაკლებია) x წერტილთა ძალიან დიდი ნაწილისათვის, კერძოდ, $t_2(k)$ -ზე გაცილებით მცირე - $2^{2k+1}t_1(k)$ რადიუსის $\tilde{B}_k$ წრის გარეთ;

2) $(1,\Delta_1)$ -კერძო წარმოებულის ყოფაქცევის განმსაზღვრელი

$$\left|\frac{f(x+h)-f\left(x+h(1)\right)}{h_1}\right|$$

გამოსახულება „ცუდად“ იქცევა (არ შემოისაზღვრება 2^k რიცხვით) I_k ინტერვალის მნიშვნელოვან ნაწილზე (კერძოდ, მის $\alpha/2$ ნაწილზე).

ნახ.2.3.2. -ზე მოცემულია ძირითადი აგების ზოგიერთი პარამეტრის აღწერა.



ნახ. 2.3.2

შემდეგი ლემა დამტკიცებული იყო [O2] ნაშრომში. გადმოცემის სისრულისათვის მოვიყვანთ მის დამტკიცებასაც.

ლემა 2.3.A. *ვთქვათ $f_k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $(k\in\mathbb{N})$ უწყვეტი ფუნქციებისათვის სრულდება პირობები:*

$$\operatorname{supp} f_i \bigcap \operatorname{supp} f_j=\varnothing \quad (i\neq j),$$
$$x\notin\bigcup_{k=1}^{\infty}\operatorname{supp} f_k,$$

$M(f_k)(x)\le\lambda$ *ყოველი $k\in\mathbb{N}$ - თვის, სადაც $\lambda>0$ რაიმე რიცხვია.*

მაშინ

$$M\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)(x)\le\lambda.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $h\in\mathbb{R}^2,\ h\neq 0,$ ნაზრდი. ლემის პირობის ძალით მოიძებნება k_0 ინდექსი, რომლისთვისაც

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x+h)=f_{k_0}(x+h).$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f_k(x)=0$ ყოველი $k\in\mathbb{N}$ - თვის, დავწერთ

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x+h)-\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right|}{\|h\|}=\frac{\left|f_{k_0}(x+h)-f_{k_0}(x)\right|}{\|h\|}\le$$
$$\le M\left(f_{k_0}\right)(x)\le\lambda.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.3.1. *ყოველი $m\in\mathbb{N}$ - თვის მოიძებნება $v_m:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ფუნქცია ისეთი, რომ*

1) v_m *არის 1-პერიოდული და უწყვეტად დიფერენცირებადი,*

2) $0\le v_m(x)\le\dfrac{1}{2^m}\quad\left(x\in\mathbb{R}^2\right),$

3) $\left|\left\{M(v_m)>\dfrac{1}{2^m}\right\}\bigcap[0,1]^2\right|<\dfrac{1}{2^m},$

4) $\left|\left\{S_{1/2^m}\left(v_m\right)>2^m\right\}\bigcap\left[0,1\right]^2\right|>\dfrac{\alpha}{2}.$

შენიშვნა 2.3.3. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\lim\limits_{\delta\to 0}S_{\delta,\eta}\left(f\right)\left(x\right)=S_{\eta}\left(f\right)\left(x\right)$ ყოველი $f\in C\left(\mathbb{R}^2\right),\,\eta>0$ და $x\in\mathbb{R}^2$ პარამეტრებისათვის, ზომის უწყვეტობის გამოყენებით დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი საკმარისად მცირე $\delta_m\in\left(0,\dfrac{1}{2^m}\right)$ რიცხვისათვის შესრულდება, 4)-ზე უფრო ძლიერი, შემდეგი პირობა

4′) $\left|\left\{S_{\delta_m,1/2^m}\left(v_m\right)>2^m\right\}\bigcap\left[0,1\right]^2\right|>\dfrac{\alpha}{2}.$

დამტკიცება. $k\in\mathbb{N}$ რიცხვისათვის განვიხილოთ ძირითადი აგების ძალით არსებული $t_1\left(k\right),\,t_2\left(k\right),\,I_k,\,B_k,\,\tilde{B}_k$ და f_k პარამეტრები.

ერთეულოვანი კვადრატი $\left[0,1\right]^2$ დავყოთ I_k ინტერვალის ტოლ $I_{k,p,q}$ $\left(1\le p\le 1/t_1\left(k\right),\,1\le q\le 1/t_2\left(k\right)\right)$ ინტერვალებად. ყოველი

$$1\le p\le 1/t_1\left(k\right)-1 \text{ და } 1\le q\le 1/t_2\left(k\right)-1$$

ინდექსებისათვის $T_{p,q}$ -თი იყოს ძვრა, რომელსაც I_k გადაყავს $I_{k,p,q}$ -ში და შემდეგ შემოვიღოთ აღნიშვნები (იხ. ნახ. 2.3.3)

$$f_{k,p,q}=f_k\circ T_{p,q},\qquad B_{k,p,q}=T_{p,q}\left(B_k\right),\;\; \tilde{B}_{k,p,q}=T_{p,q}\left(B_k\right).$$

v_m იყოს 1-პერიოდული ფუნქცია ისეთი, რომ

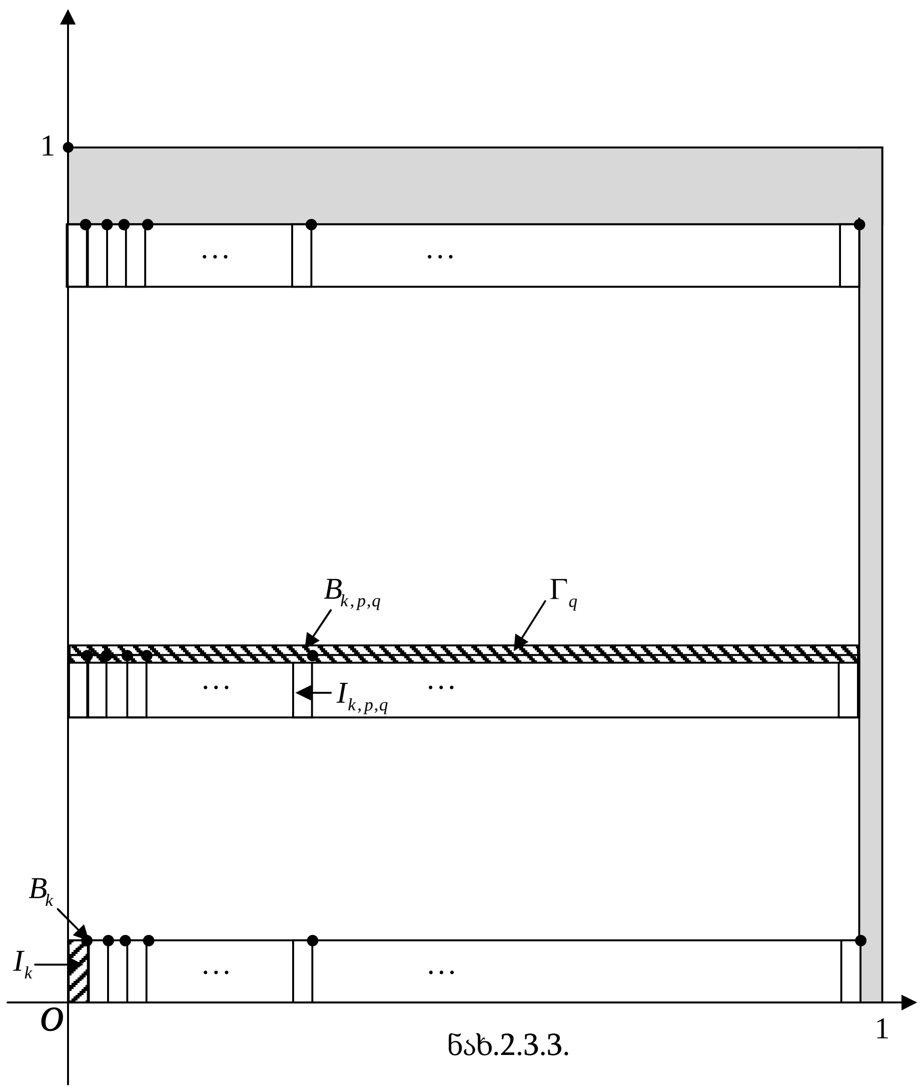
$$v_m\left(x\right)=\sum_{p=1}^{1/t_1(k)-1}\;\sum_{q=1}^{1/t_2(k)-1}f_{k,p,q}\left(x\right) \text{ ყოველი } x\in\left[0,1\right]^2 \text{ წერტილისათვის.}$$

თუ k -ს ავიღებთ საკმარისად დიდს, მაშინ ასეთნაირად აგებული v_m ფუნქცია დააკმაყოფილებს ოთხივე საჭირო თვისებას. მართლაც, 1) და 2) ტრივიალურად დგინდება. 4) თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს $S_{1/2^m}$ ოპერატორის ძვრის მიმართ ინვარიანტულობიდან და ძირითადი აგებით უზრუნველყოფილი f_k ფუნქციის 2) თვისების საფუძველზე. 3) თვისების დასადგენად უნდა გავითვალისწინოთ M ოპერატორის ძვრის მიმართ ინვარიანტულობა, ძირითადი აგებით გაპირობებული f_k -ს 1) თვისება და ლემა 2.3.A, რომელთა ძალითაც

$$\left\{ M\left(v_m\right) > \frac{1}{2^m} \right\} \bigcap \left[0,1\right]^2$$

სიმრავლე ჩართული იქნება იმ $\Gamma_q \quad \left(1 \le q \le 1/t_2\left(k\right)-1\right)$ ზოლების გაერთიანებაში (იხ. ნახ. 2.3.3), რომლებიც მოჭიმულია $\tilde{B}_{k,p,q} \quad \left(1 \le q \le 1/t_2\left(k\right)-1\right)$ წრეებზე. ასეთი ზოლების გაერთიანება კი საკმაოდ დიდი k-ს შემთხვევაში $\left[0,1\right]^2$ კვადრატს ჩამოკვეთს $1/2^m$-ზე მცირე ნაწილს.

ლემა დამტკიცებულია.



ნახ.2.3.3.

$E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ეწოდება l პერიოდული $(l>0)$, თუ მისი მახასიათებელი ფუნქცია χ_E l-პერიოდულია თითოეული ცვლადის მიმართ.

შემდეგი ლემა ეკუთვნის ა. კალდერონს (იხ. მაგ. [Zy, თ. XIII, §1]).

ლემა 2.3.B. *ვთქვათ $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ არის $\mathbb{R}^n$ სივრცის ზომად და l-პერიოდულ სიმრავლეთა მიმდევრობა ისეთი, რომ*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|E_k \bigcap [0,l]^n\right| = \infty.$$

მაშინ მოიძებნებიან $x_k \in \mathbb{R}^n$ ვექტორები ისეთები, რომ „გადაძრული“ - $(x_k+E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარი - $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(x_k+E_k)$ არის სრული ზომის სიმრავლე $\mathbb{R}^n$ - ში.

შემდეგი თეორემა ეკუთვნის ვ. სტეპანოვს (იხ. მაგ. [Sa1, თ. IX, $14]).

თეორემა 2.3.A. *ვთქვათ $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ზომადი ფუნქციაა და*

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{\|h\|}<\infty$$

რაიმე E სიმრავლის ყოველ x წერტილში. მაშინ f ფუნქცია დიფერენცირებადია E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილში.

თეორემა 2.3.1-ის დამტკიცება. ვთქვათ v_m ფუნქციები და δ_m რიცხვები შერჩეულია ლემა 2.3.1-ის მიხედვით (იხ. აგრეთვე, შენიშვნა 2.3.3).

$m(1)<m(2)<\cdots$ ინდექსთა მიმდევრობა შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ ყოველი $i\ge 2$-თვის სრულდებოდეს პირობები

$$2^{m(i)-1} > i+\sum_{j=1}^{i-1}\max_{x\in\mathbb{R}^2}\left|D_1 v_{m(j)}(x)\right|, \qquad (1)$$

სადაც D_1 კერძო წარმოებულია პირველი ცვლადით;

$$\omega\left(D_1 v_{m(j)}, \frac{1}{2^{m(i)}}\right)<1 \quad \text{ყოველი } j\in\overline{1,i-1}\text{-თვის}, \qquad (2)$$

სადაც $\omega(h,t)$ აღნიშნავს h ფუნქციის უწყვეტობის მოდულს;

$$\frac{1}{\min\left\{\delta_{m(1)},\cdots,\delta_{m(i)}\right\}2^{m(i+1)}}<\frac{1}{2^i}. \qquad (3)$$

ვისარგებლოთ ა. კალდერონის ლემით (ლემა 2.3.B) და ვიპოვოთ x_i ძვრები ისეთი, რომ

$$x_i+\left\{S_{\delta_{m(i)},1/2^{m(i)}}\left(v_{m(i)}\right)>2^{m(i)}\right\} \qquad (4)$$

სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარი იყოს სრული ზომის სიმრავლე $\mathbb{R}^2$ -ში.

$\tilde{v}_{m(i)}$ -ით აღვნიშნოთ $v_{m(i)}$ ფუნქციის x_i ძვრა, ე.ი.

$$\tilde{v}_{m(i)}(\cdot)=v_{m(i)}(\cdot-x_i) \quad (i\in\mathbb{N}).$$

M და $S_{\delta,\eta}$ ოპერატორების ძვრის მიმართ ინვარიანტულობიდან გამომდინარე,

$$\left\{M\left(\tilde{v}_{m(i)}\right)>\frac{1}{2^{m(i)}}\right\}=x_i+\left\{M\left(v_{m(i)}\right)>\frac{1}{2^{m(i)}}\right\}, \qquad (5)$$

$$\left\{S_{\delta_{m(i)},1/2^{m(i)}}\left(\tilde{v}_{m(i)}\right)>2^{m(i)}\right\}=x_i+\left\{S_{\delta_{m(i)},1/2^{m(i)}}\left(v_{m(i)}\right)>2^{m(i)}\right\}. \qquad (6)$$

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ D_1 -ის ძვრის მიმართ ინვარიანტულობის ძალით, $\tilde{v}_{m(i)}$ ფუნქციებისათვის შესრულებული იქნება (1) და (2) პირობების მსგავსი პირობები.

f ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{v}_{m(i)}.$$

ცხადია, რომ f უწყვეტია და 1-პერიოდული.

განვიხილოთ სიმრავლეები

$$E_1=\overline{\lim_{i\to\infty}}\left\{S_{\delta_{m(i)},1/2^{m(i)}}\left(\tilde{v}_{m(i)}\right)>2^{m(i)}\right\}\bigcap(0,1)^2,$$

$$E_2=\overline{\lim_{i\to\infty}}\left\{M\left(\tilde{v}_{m(i)}\right)>\frac{1}{2^{m(i)}}\right\}\bigcap(0,1)^2.$$

გვაქვს, რომ (იხ. ლემა 2.3.1 და (5), (6))

$$|E_1|=1 \quad \text{და} \quad |E_2|=0. \qquad (7)$$

ვთქვათ $i \geq 2$ და

$$x \in \left\{ S_{\delta_{m(i)},1/2^{m(i)}} \left(\tilde{v}_{m(i)} \right) > 2^{m(i)} \right\} \bigcap (0,1)^2 .$$

განვიხილოთ $h \in \Delta_1$ ნაზრდი ისეთი, რომ $|h_1| > \delta_{m(i)}$, $\|h\| < 1/2^{m(i)}$ და

$$\left| \frac{\tilde{v}_{m(i)}(x+h) - \tilde{v}_{m(i)}(x+h(1))}{h_1} \right| > 2^{m(i)}. \qquad (8)$$

(2) და (3) პირობებიდან ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენებით ვასკვნით, რომ ყოველი $j \in \overline{1, i-1}$ -თვის

$$\left| \frac{\tilde{v}_{m(i)}(x+h) - \tilde{v}_{m(i)}(x+h(1))}{h_1} \right| \leq \left| D_1 \tilde{v}_{m(i)}(x) \right| + 1. \qquad (9)$$

ვისარგებლოთ (8), (9), (1), (2) და (3) პირობებით. შედეგად, დავწერთ

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x+h(1))}{h_1} \right| &\geq \left| \frac{\tilde{v}_{m(i)}(x+h) - \tilde{v}_{m(i)}(x+h(1))}{h_1} \right| - \\ &- \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{\tilde{v}_{m(i)}(x+h) - \tilde{v}_{m(i)}(x+h(1))}{h_1} \right| - \\ &- \sum_{j=i+1}^{\infty} \left| \frac{\tilde{v}_{m(i)}(x+h) - \tilde{v}_{m(i)}(x+h(1))}{h_1} \right| > \\ &> 2^{m(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \left(D_1 \left(\tilde{v}_{m(j)}(x) + 1 \right) \right) - \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{\delta_{m(i)}} \cdot \frac{2}{2^{m(j)}} > \\ &> 2^{m(i)-1}. \end{aligned}$$

მიღებული შეფასებიდან გამომდინარე

$$\overline{\lim_{\Delta_1 \ni h \to 0}} \frac{f(x+h) - f(x+h(1))}{h_1} = \infty \qquad (10)$$

ყოველი $x \in E_1$ -თვის. ახლა თუ გავითვალისწინებთ (7)-ს და f ფუნქციის 1-პერიოდულობას დავასკვნით, რომ (10) შესრულებულია თითქმის ყველგან $\mathbb{R}^2$ -ზე.

ვთქვათ $x \in (0,1)^2$ და $x \notin E_2$. ცხადია მოიძებნება $i \geq 2$ ისეთი, რომ

$$x \notin \left\{ M\left(\tilde{v}_{m(i)}\right) > \frac{1}{2^{m(i)}} \right\} \bigcap (0,1)^2 \quad \text{როცა} \quad j \geq i.$$

საიდანაც

$$M\left(\sum_{j=i}^{\infty} \tilde{v}_{m(j)} \right)(x) \leq \sum_{j=i}^{\infty} M\left(\tilde{v}_{m(i)}(x)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^{m(j)}} < 1. \tag{11}$$

მეორეს მხრივ, ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენებით გვაქვს, რომ

$$M\left(\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{v}_{k(j)} \right)(x) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{i-1} \left[\max_{y \in \mathbb{R}^2} \left| D_1 \tilde{v}_{m(j)}(y) \right| + \max_{y \in \mathbb{R}^2} \left| D_2 \tilde{v}_{m(j)}(y) \right| \right] < \infty. \tag{12}$$

(11) და (12) შეფასებების ძალით $M(f)(x) < \infty$. ახლა თუ გავითვალისწინებთ (7)-ს და f -ის 1-პერიოდულობას, დავასკვნით, რომ

$$M(f)(x) < \infty \quad \text{თითქმის ყველგან } \mathbb{R}^2 \text{-ზე.}$$

აქედან კი, სტეპანოვის თეორემის (თეორემა 2.3.A) ძალით დავასკვნით, რომ f დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან $\mathbb{R}^2$ -ზე.

თეორემა დამტკიცებულია.

ლიტერატურა

[AC] C. R. Adams and J. A. Clarkson, Properties of functions $f(x,y)$ of bounded variation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **36** (1934), No. 4, 711--730.

[Ba1] L. Bantsuri, On the relation between the differentiability condition and the condition of the existence of generalized gradient, *Bull. Georgian Nat. Acad. Sci.* **171** (2005), no. 2, 241-242.

[Ba2] L. Bantsuri, On the relationship between the conditions of differentiability and existence of generalized gradient, Book of abstracts of the III international conference of the Georgian Mathematical Union(Batumi, 2012, September 2-9), 65-66.

[BO1] L. D. Bantsuri and G. G. Oniani, On the differential properties of functions of bounded variation in Hardy sense, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **139** (2005), 93--95.

[BO2] L. Bantsuri and G. Oniani, On the divergence rate of strong means of additive functions of intervals with bounded variation, *Bull. Georgian Nat. Acad. Sci.* **173** (2006), no. 3, 453--454.

[BO3] L. D. Bantsuri and G. G. Oniani, On differential properties of functions of bounded variation, *Analysis Math.* **38**(2012), no.1, 1-17.

[Br] A.M. Bruckner, *Differentiation of real functions*, Lecture Notes in Math., **659**, Springer, 1978.

[BH] J. C. Burkill and U. S. Haslam-Jones, Notes on the differentiability of functions of two variables, *J. London Math. Soc.* **7** (1932), 297--305.

[BF] H. Busemann and W. Feller, Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale, *Fundamenta Math.*, **22** (1934), 226--256.

[CA] J. A. Clarkson and C. R. Adams, On definitions of bounded variation for functions of two variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), no. 4, 824--854.

[Dz1] O. P. Dzagnidze, On the differentiability of functions of two variables and of indefinite double integrals, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **106** (1993), 7--48.

[Dz2] O. P. Dzagnidze, Some new results on the continuity and differentiability of functions of several real variabes, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **134** (2004), 1-138.

[Dz3] ო. ძაგნიძე, *ნამდვილ ცვლადთა ფუნქციების უწყვეტობა და დიფერენცი-რებადობა*, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2010.

[DO] O. Dzagnidze and G. Oniani, On one analogue of Lebesgue theorem on the differentiation of indefinite integral for functions of several variables, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **133** (2003), 1--5.

[Gu] M. de Guzman, *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, Springer, 1975.

[Ho] E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*. Vol. II, Dover Publications, Inc. (New York, N.Y., 1958).

[Iv] L. D. Ivanov, *Variations of sets and functions. Edited by A. G. Vituškin*, (Russian) Izdat. “Nauka”' (Moscow, 1975).

[JMZ] B. Jessen, J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, Note on the differentiability of multiple integrals, *Fundamenta Math.* **25** (1935), 217--234.

[Ka] G. Karagulyan, On the growth of integral means of functions from $L^1(R^n)$, *East J. Approx.*, **3** (1997), no. 1, 1--12.

[Kr] A. S. Kronrod, On functions of two variables, (Russian) *Uspekhi Matem. Nauk (N.S.)*, **5** (1950), no. 1(35), 24--134.

[Le] A. S. Leonov, Remarks on the total variation of functions of several variables and on a multidimensional analogue of Helly's choice principle, (Russian) *Mat. Zametki*, **63** (1998), no. 1, 69--80; translation in *Math. Notes*, **63** (1998), no. 1-2, 61--71.

[Na] I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable*, (Russian) Third edition. Izdat. “Nauka” (Moscow, 1974).

[Mu] S.N. Mukhopadhyay, *Higher order derivatives*, CRC press, 2012.

[O1] Г.Г. Ониани, *Дифференцирование интегралов Лебега*, Издательство Тбилисского Гос. Университета, 1998.

[O2] G. G. Oniani, On the inter-relation between differentiability conditions and the existence of a strong gradient, (Russian) *Mat. Zametki* **77** (2005), no. 1, 93--98; translation in *Math. Notes* **77** (2005), no. 1-2, 84--89.

[Sa1] S. Saks, *Theory of the integral*, Second revised edition. Dover Publications,Inc., New York, 1964.

[Sa2] S. Saks, Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral, *Fundamenta Math.*, **22** (1934), 257--261.

[Sa3] S. Saks, On the strong derivatives of functions of intervals, *Fundamenta Math.*, **25** (1935), 235--252.

[SG] G. E. Šilov and B. L. Gurevič, *Integral, measure and derivative. General theory*, (Russian). Izdat. "Nauka", Moscow, 1967.

[Sn] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton, 1970.

[Sk]A. Stokolos, Zygmund's program: some partial solutions, *Annales de l'institut Fourier*, **55,** no. 5 (2005), 1439-1453.

[St] W. Stepanoff, Sur les conditions of l'existance de la différentialle totale, Мат. Сборник, **32** (1925), 511--527.

[To] Г. П. Толстов, О частных производных, *Изв. АН СССР. Сер. матем.,* 13:5 (1949), 425–446.

[Vi] A. G. Vituškin, *On multidimensional variations*, (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1955.

[YY] W. H. Young and G. C. Young, On the discontinuities of monotone functions of several variables, *Proc. London Math. Soc.*, **22** (1924), 124--142.

[Ze] Т. Ш. Зерекидзе, *О дифференцирование интегралов относительно разных базисов и сходимости рядов Фурье,* Докторская диссертация, Тбилиси, 2003.

[Zy] A.Zygmund, *Trigonometric series*, Vol . II, Cambridge Univ. Press, 1968.