 აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თამარ ხაჩიძე

ფარული დინამიკური სიმეტრიების ზოგიერთი საკითხი რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში

ფიზიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

თეორიული ფიზიკა

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

ანზორ ხელაშვილი,
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი

დავით ნიშნიანიძე,
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა კანდიდატი

ქუთაისი

2010

ᲨᲘᲜᲐᲐᲠᲡᲘ

შესავალი

კარგად არის ცნობილი, რომ ფიზიკაში სიმეტრიები, შენახვის კანონები და მოძრაობის გადაგვარება ერთმანეთთან მჭიდროდაა დაკავშირებული. სიმეტრიის და სათანადო შენახვის კანონებს (მოძრაობის ინტეგრალებს) შორის დამოკიდებულება თავმოყრილია ნიოტერის ცნობილ თეორემაში [1], რომლის თანახმადაც თუ კოორდინატების რაიმე გარდაქმნისას არ იცვლება სისტემის ქმედება, მაშინ ამ სისტემაში ყოველ სიმეტრიის გარდაქმნას შეესაბამება მოძრაობის ინტეგრალი.

მეორეს მხრივ, ჰამილტონის დინამიკაში მოძრაობის ესა თუ ის ინტეგრალი ამავდროულად არის სათანადო სიმეტრიის გარდაქმნების უსასრულოდ მცირე ფორმის (ინფინიტეზიმალური გარდაქმნების) გენერატორი. შენახვადი სიდიდის გენერატორის პუასონის ფრჩხილი ჰამილტონიანთან (შესაბამისად, კომუტატორი – კვანტურ მექანიკაში) ნულის ტოლია. სიმეტრიების გენერატორთა ერთობლიობა ადგენს გარკვეულ ალგებრას პუასონის ფრჩხილების (კომუტატორების) მიმართ [2].

სიმეტრიებთან უშუალოდ არის დაკავშირებული მოძრაობის გადაგვარების ხასიათი. მაგალითად, კარგად არის ცნობილი, რომ თუ სისტემას გააჩნია სიმეტრია ბრუნვების მიმართ, მისი მოძრაობა ჩვეულებრივად არ გრძნობს (გადაგვარებულია) სათანადო შენახვადი სიდიდის – მომენტის $\vec{l}$ ვექტორის მიმართულებას.

თვით მოძრაობის გადაგვარება შეიძლება იყოს სხვადასხვანაირი წარმოშობისა. ზემოაღნიშნული კოორდინატების გარდაქმნასთან დაკავშირებული გადაგვარების გარდა არსებობს სხვა ტიპის გადაგვარებაც, როგორც წესი, ამ განსხვავებული ტიპის გადაგვარების მანიშნებელია ის გარემოება, რომ მოძრაობის განტოლებების ამოხსნა ხერხდება სხვადასხვა გზით, ანუ უფრო კონკრეტულად რომ ვთქვათ, ამოცანა ამოიხსნება ან სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემაში და ან იმავე სისტემაში, ოღონდ განსხვავებული ორიენტაციით. მაგალითად, კეპლერის ამოცანა ამოიხსნება როგორც პოლარულ (სფერულ) კოორდინატებში, ასევე ე.წ. პარაბოლურ კოორდინატებში [3]. ზოგადი მოსაზრებებიდან ნათელია, რომ ეს გადაგვარებაც უნდა უკავშირდებოდეს რაიმე სიმეტრიას. ეს ახალი სიმეტრიები არსებითად განსხვავდება „ჩვეულებრივ“ გარდაქმნებთან დაკავშირებულ სიმეტრი-ებისაგან, რომლებიც თავისი წარმოშობით (ბუნებით) იყვნენ გეომეტრიული.

ამ განსხვავებულ სიმეტრიებს ადგილი აქვთ მხოლოდ **გარკვეული სახის ურთიერთქმედებისათვის (დინამიკისათვის)**. მათ უწოდებენ **დინამიკურ სიმეტრიებს**,

რითაც ხაზს უსვამენ იმ გარემოებას, რომ ისინი გამომდინარეობენ მოძრაობის განტოლების კერძო ფორმიდან – მხოლოდ გარკვეული სახის ძალებისათვის.

ფიზიკაში (როგორც კლასიკურ, ისე კვანტურ მექანიკაში) ამ თვალსაზრისით გამორჩეული როლი აკისრია ორი სახის ძალებს – **კულონურს და იზოტროპულ დრეკად ძალებს**. ორივე მათგანი ბუნებაში განსაკუთრებულ როლს ასრულებს. კულონური ძალები მართავენ პლანეტების მოძრაობას (კეპლერის ამოცანა), აგრეთვე ატომებში დამუხტული ნაწილაკების (ელექტრონების და ბირთვების) ურთიერთქმედების ხასიათს. რაც შეეხება დრეკად ძალებს (ჰუკის კანონი), მათი მოქმედების არეალი შედარებით შეზღუდულია – ისინი არსებით როლს თამაშობენ მხოლოდ მცირე (ატომურ) მანძილებზე, განსაზღვრავენ რა ატომებისა და მოლეკულების რხევებს წონასწორობის მდგომარეობების მახლობლად. მათ ფართო გამოყენება აქვთ კონდენსირებული გარემოს ფიზიკაში. როგორც უკანასკნელი პერიოდის გამოკვლევები აჩვენებს, ამ ტიპის ძალებს შეიძლება ჰქონდეთ რაიმე საერთო ძლიერად ურთიერთქმედი ნაწილაკების (ჰადრონების) შიგნით კვარკებს შორის ურთიერთქმედების ხასიათთან. ამ სახის პოტენციალებს, რომლებიც მოკლე ქმედებას შეესაბამება, დიდი ხანია იყენებენ ბირთვულ ფიზიკაში, განსაკუთრებით მრავალნუკლონიანი ამოცანების თეორიული ანალიზის დროს.

წინამდებარე სადისერტაციო ნაშრომში ძირითადი აქცენტი გამახვილებული იქნება კულონური ამოცანის დინამიკური სიმეტრიის ხასიათის შესწავლაზე. ნაშრომის მთავარი მიზანია **სპინიანი ნაწილაკების ბმული სისტემების (წყალბადის ატომი კულონური პოტენციალით) დინამიკური სიმეტრიების შესწავლა რელატივისტური კვანტური მექანიკის ფარგლებში**, თუმცა გადმოცემის სისრული-სათვის საჭიროდ ჩავთვალეთ ნაშრომში ჩაგვერთო ამ სიმეტრიასთან დაკავ-შირებული სხვა საკითხებიც.

ნაშრომის საბოლოო შედეგი შეგვიძლია ასე შევაჯამოთ: დირაკის განტოლებას ელექტრონისათვის კულონური პოტენციალით ჯერ კიდევ აქვს შენარჩუნებული კლასიკური ამოცანისათვის დამახასიათებელი **„ფარული" სიმეტრია**, რომელიც საბოლოო ჯამში მჟღავნდება გარკვეული სახის ალგებრის **(ე.წ. ვიტენის ალგებრის)** სახით, რაც განაპირობებს ამოცანის კვანტურ-მექანიკურ **სუპერსიმეტრიას**. სხვა სიტყვებით – **პლანეტების ჩაკეტილ ორბიტებზე მოძრაობის განმსაზღვრელი დამატებითი სიმეტრია (ე.წ. ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის შენახვა) მიკროსამყაროში (წყალბადის ატომი) ტრანსფორმირდა გარკვეული სახის სუპერსიმეტრიად, რომელიც ამ კერძო შემთხვევაში აკონტროლებს წყალბადის**

ატომის სპექტრის გადაგვარებას დირაკის განტოლებაში და კრძალავს ე.წ. ლემბის წანაცვლების არსებობას.

ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორი განზოგადებულია იმ შემთხვევისათვის, როცა დირაკის ჰამილტონიანში ლორენც-ვექტორის მე-4 კომპონენტთან ერთად ჩართულია ლორენც-სკალარული პოტენციალიც. ამავე დროს სიმეტრიის ამ ოპერატორის გამოყვანა კვლავ მთლიანად ემყარება ჩვენს მიერ დამტკიცებულ თეორემას.

პირველად სამეცნიერო ლიტერატურაში მიღებულია იმის მტკიცება, რომ მხოლოდ კულონურ პოტენციალს გააჩნია დამატებითი დინამიკური სიმეტრია, რომლისთვისაც ალგებრულად ამოხსნილია სპექტრის ამოცანა და მიღებულია დირაკის განტოლების ამოუხსნელად ენერგეტიკული სპექტრი კომბინირებული კულონური ამოცანისათვის.

ნაშრომის სტრუქტურა ასეთია: შედგება 4 თავისაგან, რომლებშიც თანმიმდევრულად არის გადმოცემული და გაანალიზებული დამატებითი დინამიკური სიმეტრია კლასიკურ მექანიკაში, არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში და რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში. ნაშრომის მე-2, მე-3 და მე-4 თავებში გამოაშკარავებულია კულონური ამოცანის სუპერსიმეტრია. თითოეულ თავში მიღებულია გარკვეული ორიგინალური შედეგები, როგორც გამოთვლითი, ასევე კონცეპტუალური ხასიათისა. ნაშრომის ბოლოს მოყვანილია 2 დამატება და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხა.

- **პრობლემის დასმა და სამეცნიერო შედეგების ზოგადი მიმოხილვა**

ნაშრომის პირველი 2 თავი მიმოხილვითი ხასიათისაა. განიხილება ზოგადად პრობლემის შინაარსი და არსებულ სამეცნიერო ლიტერატუირაში გამოქვეყნებული ძირითადი შედეგები, განსაკუთრებით კლასიკურ მექანიკასა და არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში. აღწერილია მეთოდები, რომლებსაც კეპლერის კლასიკური ამოცანა საბოლოო ჯამში მიყავს სუპერსიმეტრიულ კვანტურ-მექანიკურ სურათზე.

დისერტაციის ორიგინალური შედეგების გადმოცემა იწყება ნაშრომის მე-3 თავით, სადაც დირაკის განტოლებისათვის კულონური პოტენციალის შემთხვევაში ჩამოყალიბებულია სხვადასხვა სიმეტრიის თვისებები და გამოყვანილია სათანადო კომუტაციის თანაფარდობები. განსაკუთრებული ყურადღება აქვს დათმობილი ე.წ. დირაკის K -ოპერატორს, რომელიც კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან და კულონურ ველში არწერს ელექტრონის ენერგეტიკული სპექტრის გადაგვარებას. ასეთ სურათში აშკარად მჟღავნდება სპექტრის სუპერსიმეტრიული ბუნება.

შემდგომი ანალიზიააშკარავებს ამ ოპერატორის მეტად მნიშვნელოვან როლს მთელს ამოცანაში.

პირველ რიგში ვღებულობთ თეორემას [4-6] დირაკის K -ოპერატორთან ანტიკომუტირებადი ოპერატორების სახის შესახებ. აღმოჩნდა, რომ ამ თეორემას, მისი მტკიცების სიმარტივის მიუხედავად, აქვს გადამწყვეტი მნიშვნელობა საკითხის შესწავლისათვის. ის თავისებური მეგზურის როლს ასრულებს: თუ გვეცოდინება ასეთი ანტიკომუტირებადი ოპერატორების ზოგადი სახე, შეგვეძლება მათგან შევადგინოთ ისეთი კომბინაციები, რომლებიც იკომუტირებენ დირაკის ჰამილტონიანთან და, მაშასადამე შექმნიან ამოცანის საძიებელ სისტემას.

სწორედ ამ მეთოდით მივიღეთ ჰამილტონიანთან კომუტირებედი ოპერატორი [6,7], რომელიც K- სთან ერთად ქმნის ლის გრადუირებულ $S(2)$ ალგებრას ანუ ვიტენის $N=2$ სუპერალგებრას და მხოლოდ ამ ალგებრის გენერატორებზე დაყრდნობით წმინდა ალგებრულად, მოძრაობის განტოლებების ამოხსნის გარეშე შესაძლებელი ხდება სპექტრის მიღება. საინტერესოა, რომ ჩვენს მიერ ამ გზით მირებული სიმეტრიის ოპერატორი დაემთხვა ლიტერატურაში ცნობილ ე.წ. ჯონსონისა და ლიპმანის ოპერატორს, A [8]. აღსანიშნავია, რომ ეს ოპერატორი გამოიყენებოდა სხვადასხვა ავტორის მიერ წყალბადის ამოცანის სუპერსიმეტრიის სესასწავლად [9,10], მაგრამ მისი რეგულარულად გამოყვანა ჩვენამდე არავის გამოუქვეყნებია. თვიტ ამ ოპერატორის შემომყვანმა ავტორებმა 1950 წელს მხოლოდ მოკლე ანოტაცია გამოაქვეყნეს ჟურნალში Physical Review, სადაც მოყვანილია ამ ოპერატორის მხოლოდ სახე. სამეცნიერო ლიტერეტურაში, როგორც წესი, აღნიშნული იყო ხოლმე, რომ ამ ოპერატორის კომუტირების დამტკიცება დირაკის ჰამილტონიანთან წარმოადგენს მეტად შრომატევად და ხანგრძლივ პროცედურას [11]. ამავე დროს ჩვენი განხილვიდან ნათელია, რომ არა თუ გამოგვყავს ამ ოპერატორის ცხადი სახე, არამედ პარალელურად ვამტკიცებთ მის კომუტატივობას დირაკის ჰამილტონიანთან. გამოთვლების სისრულისათვის ნაშრომის **დამატებაში** ცალკე გატანილი გვაქვს კომუტაციის თვისების მიღება ცხადად.

მიღებული ოპერატორის საფუძველზე გაანალიზებული გვაქვს კულონური ამოცანის სპექტრის თვისებები დირაკის განტოლებისათვის, რომელიც მთლიანად ალგებრულ თანაფარდობებს ემყარება და ნაჩვენებია, რომ ამ სიმეტრიის არსებობა კრძალავს ლემბის წანაცვლების არსენბობას. გაანალიზებულია მიღებული

ოპერატორის ფიზიკური შინაარსი. კერძოდ, მისი კავშირი **ლაპლას-რუნგე-ლენცის** ვექტორთან.

ნაშრომის მე-4 თავი ეძღვნება ზემოთ მოყვანილი თვალსაზრისით დირაკის ჰამილტონიანის დინამიკური სიმეტრიის უზოგადეს განხილვას [12]. შეისწავლება ნებისმიერი ცენტრალური სიმეტრიის ველი, რომელთანაც დირაკის K-ოპერატორი კომუტირებს, ე.ი. წარმოქმნის გარკვეულ სიმეტრიას. შემდგომი ანალიზი ეძღვნება ამ სიმეტრიისა და ლორენც-ვექტორის მე-4 კომპონენტთან ერთად ლორენც-სკალარული პოტენციალის ჩართვის შემთხვევის დეტალურ განხილვას. ვეძებთ დირაკის ჰამილტონიანთან კომუტირებად უზოგადეს A-ოპერატორს, რისთვისაც ვიყენებთ ჩვენს თეორემას ანტიკომუტირებადი ოპერატორისშესახებ. გამოვდივართ რა ამოცანისათვის დამახასიათებელი ფიზიკურად საინტერესო ვექტორებიდან, ვაგებთ K-სთან ანტიკომუტირებადი ოპერატორების ოპტიმალურ კომბინაციას, რომელსაც ვთხოვთ იყოს კომუტირებადი დირაკის ჰამილტონიანთან. ამ მოთხოვნიდან მიიღება განტოლებები, რომელთა ამოხსნა ცალსახად გვეუბნება, რომ **ერთადერთი პოტენციალი, რომლისთვისაც დირაკის განტოლებას გააჩნია დამატებითი სიმეტრია ზემოაღნიშნული შინაარსით, არის კულონური პოტენციალი.**

ამავე დროს ეს პოტენციალი უნდა იყოს ლორენც-ვექტორის მე-4 კომპონენტის გარდაქმნის თვისებისა, ანუ ადგილი უნდა ჰქონდეს ყალიბრულად ინვარიანტულ (მინიმალურ) ჩართვას. როგორც ვხედავთ, საკმაოდ ზოგადი განხილვის ბაზაზე მიიღება რამდენიმე მნიშვნელოვანი დასკვნა, რომლებიც აბსოლუტურად შეესაბამება თანამედროვე ფიზიკურ წარმოდგენებს. რა თქმა უნდა, კულონური პოტენციალისათვის ამ თავში მიღებული სიმეტრიის ოპერატორი ემთხვევა ჯონსონ-ლიპმანის ოპერატორს, რომელიც დირაკის ოპერატორთან ერთად წარმოქმნის ვიტენის [13] გრადუირებულ სუპერალგებრას აქედან გამომდინარე ყვლა შედეგით.

ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ყალიბრულად ინვარიანტული მინიმალური გზით ჩართული ცენტრალური პოტენციალებიდან მხოლოდ კულონური პოტენციალი ასრულებს გამოყოფილ როლს. ამავე დროს აღმოვაჩინეთ, რომ თუმცა სკალარული პოტენციალის ჩართვისას მიღებული ჰამილტონიანი კვლავ კომუტირებს დირაკის K-ოპერატორთან, იგი აღარ იკომუტირებს ზემოთ მიღებულ ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორთან.

მეორეს მხრივ, არარელატივისტური კვანტური მექანიკა (შრედინგერის განტოლება) ინდეფერენტულია პოტენციალის ლორენც-ვარიანტობის მიმართ:

მისთვის ლორენც-ვექტორის მე-4 კომპონენტი (რაც 3-განზომილებიან სივრცეში სკალარია ბრუნვების მიმართ) და წმინდა ლორენც-სკალარი ერთმანეთისაგან განურჩეველია – დირაკის განტოლებიდან არარელატივისტურ ზღვარზე გადასვლისას ორივე შემთხვევაში მიიღება ერთიდაიგივე შრედინგერის განტოლება, რომელსაც გააჩნია ზემოხსენებული დამატებითი სიმეტრია.

ამიტომ უნდა ვივარაუდოთ, რომ სკალარული პოტენციალის თანდასწრებითაც დირაკის განტოლებას კვლავ უნდა გააჩნდეს დამატებითი სიმეტრია, ოღონდ ამ შემთხვევაში ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორს ექნება სხვა სახე. ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორი განზოგადებულია იმ შემთხვევისათვის, როცა დირაკის ჰამილტონიანში ლორენც-ვექტორის მე-4 კომპონენტთან ერთად ჩართულია ლორენც-სკალარული პოტენციალიც. ამავე დროს სიმეტრიის ამ ოპერატორის გამოყვანა კვლავ მთლიანად ემყარება ჩვენს მიერ დამტკიცებულ თეორემას.

ამავე დროს პირველად სამეცნიერო ლიტერატურაში მიღებულია იმის მტკიცება, რომ მხოლოდ კულონურ პოტენციალს გააჩნია დამატებითი დინამიკური სიმეტრია, რომლისთვისაც ალგებრულად ამოხსნილია სპექტრის ამოცანა და მიღებულია დირაკის განტოლების ამოუხსნელად ენერგეტიკული სპექტრი კომბინირებული კულონური ამოცანისათვის.

დასკვნების ნაწილში მოცემულია მიღებული შედეგების კონცეპტუალური ინტერპრეტაცია.

დისერტაციაში მიღებული შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგი ნაშრომების სახით:

1. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili**, “An “Accidental” Symmetry Operator for the Dirac Equation in the Coulomb Potential”, **Modern Phys. Letters, A20, 2277-2281 (2005)** And ArXiv: **hep-th/0507247.**
2. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili**, “Manifestations the Hidden Symmetry of Coulomb Problem in the Relativistic Quantum mechanics - from Pauli toDirac Electron”, **Bull.of Georg. Acad. Sci., 172,452- 455 (2005)**; and ArXiv: **quant-ph/0507257.**
3. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili**, “The Hidden Simmetry Operator of the Kepler Problem in Relativistic Quantum Mechanics – from pauli to Dirac,” **American Journ. Of Physic, 74, 628-632 (2006)** and ArXiv: **physics-ph/0508122.**

4. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili**, “Supercharge Operator of Hidden Symmetry in the Dirac Equation”, Talk at the Int. Conf. on High Energy Physics, **CICHEP II**, Cairo, jan. 2006 (see, Proceedings **Cairo Int. Conference on High Energy Physics, CICHEP II), 279-984 (2007)** and ArXiv: **hep-th/0602181.** დაიბეჭდა აგრეთვე თსუ ჟურნალში **“Physics”,2006, v.40,97-112.**
5. **თ. ხაჩიძე,** “კულონური ურთიერთქმედების “ფარული” სიმეტრიის გამოვლინებანი რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში”, კრებულში **“და იყო დღე ფიზიკისა”, გვ. 138–145, თბილისი, 2005.**
6. **T.T. Khachidze and T. P. Nadareishvili,** “Dirac Equation and its Squaered Form”, **Bull. Of Georg. Acad.Sci., 174,** 61-64 (2006), and ArXiv**: hep-th/0606043.**
7. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili,** “On the Nature of Hidden Symmetry or accidental degeneracy of the Kepler Problem”. Talk at the School and Conference**-“New Trends on High Energy physics”**, Crimea, Yalta, 16-23 sept. 2006. **in Proceedings of this Conference**. And Arxiv: **hep-th/0610139.**
8. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili,** “Algebraic Derevation of Spectrum of the Dirac Equation for Arbitrery Combination of Lorentz-scalar and Lorentz –vector Coulomb potentials”, **Ukr. Fiz. Zhurnal (UFZ), 52 , N5** 421-423 (2007) and ArXiv**: hep-th/0612199**.
9. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili,** “On the quantum Relativistic Origin of the Coulomb Potential”, **Bull. Of Georg. Acad. of Sciences, Vol. 1(175), N4.**
10. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili,** “Supersymmetry in the Dirac Equation for Generalized Coulomb Potential”, Arxiv: **hep-th/0701259 (2007).**
11. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili,** “N=2 Supersymmetry in the Dirac equation – Possible motivation for Coulomb potential”, **Proc. SQS-07, Dubna, 2008**.
12. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili,** “ Dynamical symmetries of the Kepler – Koulomb Problem in classical and Quantum Mechanics (Non-relativistic and Relativistic), **Monograph. Nova Publishers, New York, 2008.**
13. **T.T. Khachidze and A.A. Khelashvili,** “Why the Coulomb Potential?”, **Applied and Computational Mathematics, An International Journal (in press, 2009)**

ზემოთ მოყვანილი ნაშრომების შინაარსი მოხსენებულია შემდეგ კონფერენციებზე:

1. **"იუნესკოს" საერთაშორისო კონფერენცია თეორიულ ფიზიკაში, თბილისი, სექტემბერი, 2005.**
2. **აინშტაინის ფუნდამენტური ნაშრომების 100 წლისთავისადმი მიძღვნილი ახალგაზრდა მეცნიერთა კონფერენცია, თბილისი, ოქტომბერი, 2005.**
3. **Cairo Int. Conference on High Energy Physics, CICHEP II, GUC, 14-17 Jan. 2006.**
4. **Talk at the School and Conference-"New Trends on High Energy physics", Crimea, Yalta, 16-23 sept. 2006**
5. **Int. Conference SQS-07, Dubna, Russia 2007.**

მადლობები:

მსურს პირველ რიგში გამოვხატო დიდი მადლიერება ჩემი სამეცნიერო ხელმძღვანელის პროფ. ანზორ ხელაშვილის მიმართ, რომელიც მუდმივ ყურადრებასა და მზრუნველობას იჩენდა ჩემს მიმართ. ჯერ კიდევ სტუდენტობის პერიოდიდან საინტერესო ამოცანების დასმით თანდათან გამოიკვეთა და საბოლოოდ ჩამოყალიბდა ჩემი სადისერტაციო თემა, რომლის შესრულებაშიც ბატონი ანზორი მუდამ ჩემს გვერდით იდგა.

მსურს მადლობა მოვახსენო ჩემს პროფესორ-მასწავლებლებს თსუ ფიზიკის ფაკულტეტზე სწავლების მაღალი დონის უზრუნველყოფისთვის.

განსაკუთრებული მადლიერების ღირსია აკ. წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის დეპარტამენტის ხელმძრვანელი პროფესორი დავით ნიშნიანიძე, რომელმაც უანგაროდ და თავდაუზოგავად, მომქანცველი პროცედურების შესრულებით უზრუნველყო წინამდებარე ნაშრომის სისრულეში მოყვანა და მომცა საშუალება განმეხორციელებინა ჩემი დიდი ხნის ოცნება; ბოლოსდაბოლოს ღირსებოდა ჩემს დისერტაციას დაცვა. (2006 წელს უნივერსიტეტში მიმდინარე რეფორმებმა შეაყოვნა დისერტაციის დროული განხილვა).

ასევე მადლობას ვუხდი აწსუ-ს პროფესორ-მასწავლებლებს, რომლებიც დიდი ენთუზიაზმით დამიდგნენ გვერდში: გ. ონიანი, თ. ეფრემიძე, და სხვები.

მადლობა მინდა მოვახსენო ყველა ჩემს გულშემატკივარს, მშობლებს, ძმებს და ახლობლებს თანადგომისთვის.

და ბოლოს განუსაზღვრელ მადლობას ვუხდი ჩემს ძვირფას და უსაყვარლეს მეუღლეს სოსო პატარაიას იმ დიდი მოთმინების, მხარდაჭერისა და სიყვარულისთვის რომელსაც იგი იჩენდა ჩემდამი, ურომლისოდაც შეუძლებელი იქნებოდა ლაპარაკიც კი რაიმე წარმატებაზე.

თავი I.

ფარული სიმეტრია კლასიკურ მექანიკაში

კლასიკურ მექანიკაში კეპლერის ამოცანის ორბიტების ჩაკეტილობას და მათზე მოძრაობის მკაცრ პერიოდულობას განსაზღვრავს დამატებითი შენახვადი ვექტორული სიდიდე, რომელიც სამეცნიერო ლიტერატურაში უფრო ხშირად ცნობილია როგორც **რუნგე-ლენცის** ვექტორი. რუნგე-ლენცის ვექტორი ერთ-ერთი გამორჩეული სიდიდეა თავისი სილამაზით და დანიშნულებით, მაგრამ ნიუტონის მექანიკაში რატომღაც მის როლს ნაკლებად არსებითად თვლიდნენ. მის არაარსებითობაზე მეტყველებს თუნდაც შემდეგი ფაქტი: უკვე რამდენიმე საუკუნეა, რაც ფიზიკოსები ხსნიან კეპლერის ამოცანას (ამოხსნის ქვეშ გვესმის $\vec{r} = \vec{r}(t)$ დამოკიდებულების პოვნა). მაგრამ, მეორე მხრივ, უძველესი ნაშრომი რუნგე-ლენცის ვექტორზე ეკუთვნის ლაპლასს (1829წ.)[14]. სახელის არასწორად შერქმევა (ლაპლასის გარეშე!) მოძრაობის ამ მუდმივას არარსებითობაზე მიუთითებს. მაგრამ სინამდვილეში ეს ვექტორი არის მეტად მნიშვნელოვანი: მისი ცოდნა საშუალებას გვაძლევს კეპლერის ამოცანაში ვიპოვოთ ჩაკეტილი (ბმული) ორბიტის განტოლება ისე, რომ არ ამოვხსნათ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება. ამ ვექტორის სიგრძე განსაზღვრავს ორბიტის ექსცენტრისიტეტს, ხოლო მიმართულება – დიდი ნახევარღერძის მიმართულებას.

მომხიბვლელია აგრეთვე ის ფაქტი, რომ რუნგე-ლენცის ვექტორი არის კეპლერის ამოცანის სიმეტრიის ჯგუფის გენერატორი. ამჟამად ეს ვექტორი უკვე ჩნდება როგორც კლასიკური, ისე კვანტური მექანიკის თითქმის ყველა სახელმძღვანელოში. ლუნგრე-ლენცის ვექტორის შემოტანის სესახებ ისტორიული ცნობები გადმოცემულია

ჰ. გოლდსტეინის ნაშრომში [15] ‘‘Prehistory of the Runge-Lenz Veqtor’’, Am. J. phys. vol.43, №8 (1975).

ყურადღების ღირსია ის ფაქტიც, რომ **ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის** (ასე ვუწოდებთ მას ამის შემდეგ) გამოყვანა ზოგადი პრინციპებიდან რატომღაც დღემდე ვერ მოხერხდა და ის ემყარება, როგორც წესი, მოძრაობის განტოლებაზე გარკვეული მანიპულირების ჩატარებას. ამის მიზეზი ალბათ იმაში უნდა ვეძიოთ, რომ სიმეტრიის ის ჯგუფი, რომელსაც გენერირებს ეს ვექტორი, არ არის ჩვეულებრივი გეომეტრიული სტრუქტურისა, და გარკვეული აზრით, მართლაც

„ფარულ სიმეტრიას“ შეესაბამება, ხოლო მოძრაობის ინტეგრალების მოძებნის თანამედროვე მეთოდები ჯერჯერობით არ არიან იმდენად ეფექტური, რომ განსაზღვრონ „ფარული სიმეტრიის“ შესაბამისი მოძრაობის ინტეგრალები.

I.1. ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის გამოყვანა მოძრაობის განტოლებებზე დაყრდნობით.

ჩავწეროთ ნიუტონის მესამე კანონი ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრავი ნაწილაკებისთვის შემდეგი ფორმით:

$$\dot{\vec{p}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \text{(I.1.1)}$$

სადაც $f(r)$ არის ძალის მოდული, უფრო ზუსტად, ძალის რადიალური ნაწილი.

$$f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

გავამრავლოთ ვექტორულად ეს ტოლობა კუთხური მომენტის $\vec{l}$ ვექტორზე, რომელიც მუდმივია ცენტრალური სიმეტრიის ველში და ჩავატაროთ სათანადო გარდაქმნები. იმის გათვალისწინებით, რომ $\vec{l} = [\vec{r}\times\vec{p}]$ და $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}}\times\vec{l} &= \frac{mf(r)}{r}[\vec{r}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}]] = \\ &= \frac{mf(r)}{r}\left\{\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - r^2\dot{\vec{r}}\right\}\end{aligned} \qquad \text{(I.1.2)}$$

ამ განტოლების შემდეგი გამარტივება შეგვიძლია იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2) = r\dot{r}$$

(სხვა სიტყვებით, ეს უბრალოდ ნიშნავს, რომ რადიალური სიჩქარის მდგენელი არის $\dot{r}$

პარალელურად გამოვიყენოთ ის ფაქტი, რომ $\vec{l}$ მუდმივია. მაშინ (I.1.2) ასე გადაიწერება:

$$\frac{d}{dt}[\vec{p}\times\vec{l}] = -mf(r)r^2[\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2}]$$

ან

$$\frac{d}{dt}[\vec{p}\times\vec{l}\,] = -mf(r)r^2\,\frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}}{r}) \qquad \text{(I.1.3)}$$

$f(r)$–ის ფორმის დაუკონკრეტებლად ამის შემდეგ წინ ველარ წავალთ. მაგრამ ნათელია, რომ (I.1.3) განტოლების ინტეგრაცია მაშინვე მოხერხდება, თუ $f(r)$ აღმოჩნდება r^2-ის უკუპროპორციული, რასაც ადგილი აქვს სწორედ კეპლერის ამოცანაში:

$$f(r) = -\frac{a}{r^2}, \qquad \text{a=GmM ან } kQ_1Q_2 \text{ (კულონი)}$$

ამ შემთხვევაში ზედა განტოლება მივა თანაფარდობაზე:

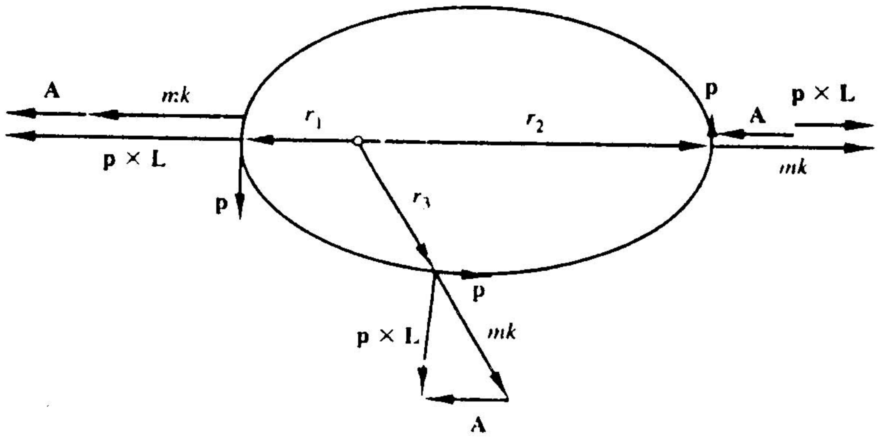
$$\frac{d}{dt}[\vec{p}\times\vec{l}\,] = \frac{d}{dt}(ma\frac{\vec{r}}{r}),$$

რაც გვეუბნება, რომ კეპლერის ამოცანაში არსებობს შენახვადი ვექტორი $\overrightarrow{A}$, განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$\vec{A} = [\vec{p}\times\vec{l}\,] - ma\frac{\vec{r}}{r} = [\vec{p}\times\vec{l}\,] - ma\hat{\vec{r}} \qquad \text{(I.1.4)}$$

სადაც $\hat{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r}$ – ერთეულოვანი ვექტორია რადიუს-ვექტორის გასწვრივ. ამ

თანაფარდობაში მოყვანილ 3 ვექტორსა ($\vec{p},\vec{l},\hat{\vec{r}}$) და შენახვად $\vec{A}$ ვექტორს შორის გეომეტრიული ურთიერთობა მოყვანილია ნახაზზე 1, ორბიტის 3 სხვადასხვა წერტილში.



ნახაზი 1.

როგორც შესავალში უკვე ითქვა, ფიზიკოსებს შორის ვექტორი ცნობილია რუნგე-ლენცის ვექტორის სახელწოდებით, თუმცა პრიორიტეტი ეკუთვნის **ლაპლასს.**

ლაპლასმა დაამუშავა [14] მოძრაობის ინტეგრალების მიღების საკუთარი მეთოდიკა, რომელიც დღესაც გამოიყენება [16] და ემყარება კოორდინატებისა და მათი წარმოებულების უზოგადესი პოლინომების განხილვას, რომლებსაც შემდეგ მოეთხოვება დროისგან დამოუკიდებლობა (მუდმივობა). საინტერესოა აღინიშნოს, რომ ლაპლასის შემდეგ დღემდე კვადრატულზე უფრო მაღალი რიგის პოლინომები ჯერ არ განუხილავთ, ალბათ მეთოდის სირთულის გამო. ასეთი გზით მირებულია მოძრაობის ინტეგრალები არაცენტრალური ძალების შემთხვევაშიც[17].

ბოლო ხანებში განვიტარება ჰპოვა კლასიკურ მექანიკაში იმპულსურმა წარმოდგენამ [18-19] და ამ მეთოდითაც გამოყვანილია ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი [20].

სანამ კვანტურ-მექანიკურ განხილვაზე გადავიდოდეთ, მოკლედ შევეხოთ ამ ვექტორის ფიზიკურ გამოყენებებს კლასიკურ მექანიკაში.

I.2. ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის ფიზიკური გამოყენებანი კლასიკურ მექანიკაში

მას შემდეგ, რაც გავარკვიეთ ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის გამოყვანის სხვადასხვა შესაძლებლობა კლასიკურ მექანიკაში, გადავიდეთ ამ ვექტორის ფიზიკური შინაარსის შესწავლაზე და უშუალო გამოყენებებზე.

ა) ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი და ორბიტის განტოლება

$\vec{A}$ ვექტორის განმარტებიდან ნათელია, რომ ის ძევს ორბიტის სიბრტყეში, ამიტომ პერპენდიკულარულია კუთხური მომენტის $\vec{l}$ ვექტორისა

$$\vec{l}\cdot\vec{A}=0 \qquad \text{(I.2.ა.1)}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\vec{A}$ უნდა იყოს ფიქსირებული ვექტორი ორბიტის სიბრტყეში. თუ $\theta-$ს გამოვიყენებთ კუთხედ $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორსა და $\vec{A}$ ვექტორის

ფიქსირებულ მიმართულებას შორის და განვიხილავთ $\vec{r}\ \vec{A}$ სკალარულ ნამრავლს , მიიღება:

$$\vec{r}\vec{A} = rA\cos\theta = \vec{r}\cdot[\vec{p}\times\vec{l}\,] - mkr$$

სამმაგ ნამრავლში ვექტორების ციკლიური გადასმა გვაძლევს

$$\vec{r}[\vec{p}\times\vec{l}\,] = \vec{l}[\vec{r}\times\vec{p}] = \vec{l}\cdot\vec{l} = \vec{l}^{\,2}$$

ამრიგად

$$rA\cos\theta = l^2 - mkr$$

ან

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(1 + \frac{A}{mk}\cos\theta) \qquad \text{(I.2.ა.2)}$$

მაშასადამე, ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი იძლევა განსხვავებულ (ალგებრულ) საშუალებას მივიღოთ ორბიტის განტოლება (!) კეპლერის პრობლემაში, მოძრაობის განტოლების ამოუხსნელად.

თუ ამ შედეგს შევადარებთ ორბიტის განტოლებას ჩვეულებრივი ფორმით, დავასკვნით, რომ $\vec{A}$ მიმართულია რადიუს-ვექტორის გასწვრივ ორბიტის პერიჰელიუმისკენ, და სიდიდით ტოლია:

$$A = mke, \qquad \text{(I.2.ა.3)}$$

სადაც e არის ორბიტის ექსენტრისიტეტი.

კეპლერის ამოცანაში ამრიგად გვაქვს მოძრაობის 2 ვექტორული კონსტანტა $\vec{l}$ და $\vec{A}$, და სკალარული სიდიდე – სრული ენერგია E. რადგან ვექტორს აქვს 3 დამოუკიდებელი კომპონენტი, ეს შეესაბამება 7 შენახვად სიდიდეს. გამოდის, რომ სისტემას აქვს 6 თავისუფლების ხარისხი და ამიტომ მას უნდა ჰქონდეს 6 მოძრაობის დამოუკიდებელი ინტეგრალი, რომლებიც უნდა შეესაბამებოდეს ნაწილაკის საწყისი მდებარეობისა და საწყისი სიჩქარის 3-3 კომპონენტს.

გარდა ამისა, ჩვენს მიერ ნაპოვნი ინტეგრალები არიან $\vec{r}$ და $\vec{p}$ სიდიდეების ალგებრული ფუნქციები, რომლებიც აღწერენ ორბიტას როგორც მთლიანს (სივრცეში ორიენტაციას, ექსცენტრისიტეტს და ა.შ.). არც ერთი ამ შვიდთაგანი არ გვიჩვენებს, თუ სად იმყოფებოდა ნაწილაკი ორბიტაზე საწყის მომენტში.

ერთ-ერთი მოძრაობის კონსტანტა შეგვიძლია ისე ავირჩიოთ, რომ შეესაბამებოდეს ამ ინფორმაციას – ნაწილაკის მდებარეობას ორბიტაზე საწყის მომენტში. მაშინ 6-დან მხოლოდ 5 დამოუკიდებელი კონსტანტა დაგვრჩება, რომლებმაც უნდა განსაზღვრონ ორბიტის ზომები, ფორმა და ორიენტაცია.

ამიტომ ვასკვნით, რომ ყველა ნაპოვნი მოძრაობის ინტეგრალი არ უნდა იყოს ურთიერთდამოუკიდებელი, არამედ უნდა არსებობდეს 2 თანაფარდობა მათ შორის (7-დან 5-ზე დაყვანისათვის). ერთ-ერთ ასეთ თანაფარდობად შეგვიძლია ჩავთვალოთ $\vec{l}$ და $\vec{A}$ ვექტორების ურთიერთმართობულობა, (I.2.ა1). მეორე მათგანი გამოიყვანება $\vec{A}^2$-ის გამოთვლით, რაც იძლევა.

$$\vec{A}^2 = m^2k^2 + 2mEl^2 \qquad \text{(I.2.ა.4)}$$

სადაც E არის სრული ენერგია

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

ამრიგად, 7-ის ნაცვლად გვქონია მხოლოდ 5 დამოუკიდებელი კონსტანტა.

კუთხური მომენტის ვექტორი და სრული ენერგია ერთად ადგენენ 4 დამოუკიდებელ მოძრაობის ინტეგრალს, ხოლო ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი ამატებს მხოლოდ ერთს.

ცნობილია, რომ ორბიტების ჩაკეტილობა საკმაოდ ძლიერ შეზღუდვებს ადებს მოქმედ ძალებს. მხოლოდ 2 ტიპის ძალებისათვის – კულონური და იზოტროპული ოსცილატორი – მიიღება პერიოდული მოძრაობა ორბიტაზე ბერტრანის თეორემის თანახმად [21].

საზოგადოდ, თუ არსებობს E და $\vec{l}$-ის გარდა დამატებითი მოძრაობის ინტეგრალი, როგორც $\vec{r}$ და $\vec{p}$–ს ალგებრული ფუნქცია, ეს იმის მაჩვენებელია, რომ მოძრაობა არის გადაგვარებული, ხოლო შემოსაზღვრული ორბიტები ჩაკეტილი.

ბ) კეპლერის ამოცანის ალგებრული ასპექტები პუასონის ფჩხილებით.

კლასიკურ მექანიკაში არსებობს ცალსახა შესაბამისობა შენახვის კანონებსა და სიმეტრიებს შორის. ფუნქცია, რომელიც არის მოძრაობის კონსტანტა, წარმოადგენს სისტემის სიმეტრიის გენერატორს.

ამიტომ საინტერესოა გაირკვეს, თუ რა სიმეტრიას შეესაბამება ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი. ამისათვის ყველაზე უფრო მოსახერხებელია შევისწავლოთ ამოცანისათვის საინტერესო ფიზიკური სიდიდეების პუასონის ფრჩხილები.

კუთხური $\vec{l}$ მომენტის არსებობა, როგორც ცნობილია, დაკავშირებულია სისტემის ჰამილტონიანის ინვარიანტულობასთან სივრცული 0(3) ბრუნვების მიმართ. ეს თვისება გამოიხატება შემდეგი პუასონის ფრჩხილით

$$(l_i, l_j) = \varepsilon_{ijk} l_k \qquad \text{(I.2.ბ.1)}$$

ამავე დროს, ამ ვექტორის შენახვა ნიშნავს

$$(l_i, H) = 0 \qquad \text{(I.2.ბ.2)}$$

სადაც არის ჰამილტონიანი

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \qquad \text{(I.2.ბ.3)}$$

(შევნიშნოთ, რომ (I.2.ბ.2) მაშინაც სრულდება, როცა გვაქვს ნებისმიერი ცენტრალური პოტენციალი, V(r))

ადვილად გამოითვლება მომენტის პუასონის ფრჩხილი ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის კომპონენტებთან

$$(l_i, A_j) = \varepsilon_{ijk} A_k \qquad \text{(I.2.ბ.4)}$$

ეს თანაფარდობა იმ უბრალო ფაქტს გამოხატავს, რომ $\vec{A}$ არის ვექტორი $\vec{l}$-ით გენერირებული ბრუნვების მიმართ.

გადავდგათ შემდეგი ნაბიჯი. გამოვთვალოთ ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის კომპონენტების პუასონის ფრჩხილი. საკმაოდ გრძელი, მაგრამ პირდაპირი გამოთვლებით მიიღება, რომ

$$(A_i, A_j) = \sqrt{-2m|H|}\,\varepsilon_{ijk} l_k$$

ხოლო თუ ამ კომპონენეტებს ვანორმირებთ უფრო მოხერხებულად,

$$A_i \to D_j \equiv \frac{1}{\sqrt{-2m|H|}} A_i \qquad \text{(I.2.ბ.5)}$$

მაშინ მათთვის პუასონის ფრჩხილი იღებს უფრო მარტივ სახეს;

$$(D_i D_j) = \varepsilon_{ijk} l_k \qquad \text{(I.2.ბ.6)}$$

ამავე დროს

$$(D_i, H) = 0$$

რაც D_i-ის მუდმივობას გამოხატავს.

ამრიგად, მივიღეთ, რომ გვაქვს ვექტორთა 2 ერთობლიობა, (l_i, D_i), რომლებიც მოძრაობის ინტეგრალებია და აკმაყოფილებენ პუასონის ფრჩხილების შემდეგ (გაფართოებულ) ალგებრას,

$$\left.\begin{aligned} (l_i, l_j) &= \varepsilon_{ijk} l_k \\ (l_i, D_j) &= \varepsilon_{ijk} D_k \\ (D_i, D_j) &= \varepsilon_{ijk} l_k \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.2.ბ.7)}$$

ეს 6 გენერატორი კეპლერის პრობლემის ჰამილტონიანს არ ცვლის და ადგენს პუასონის ფრჩხილების ჩაკეტილ ალგებრას. იმის გასარკვევად, თუ რა სიმეტრიას შეესაბამება ეს ალგებრა, უმჯობესია მივცეთ მას უფრო ტრადიციული სახე შემდეგი წრფივი კომბინაციების შემოტანით:

$$J_k = \frac{l_k + iD_k}{2}, \qquad K_k = \frac{l_k - iD_k}{2} \qquad \text{(I.2.ბ.8)}$$

მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ზემოთ მოყვანილი (I.2.ბ.7) პუასონის ფრჩხილები ორ ქვეალგებრად იხლიჩება

$$(J_i, J_j) = \varepsilon_{ijk} J_k, \qquad (K_i, K_j) = \varepsilon_{ijk} K_k$$

$$(J_i, K_j) = 0 \tag{I.2.ბ.9}$$

ეს თანაფარდობანი ცხადად გამოხატავენ 2 ურთიერთდამოუკიდებელ ანალიზურად შენახვად სიდიდეებს, რომელთაგან თითოეული აღწერს გარკვეულ ბრუნვებს [(I.2.ბ.9) თანაფადობების პირველი სტრიქონი], რომლებიც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია [ამავე თანაფარდობების მე-2 სტრიქონი].

ამიტომ ვასკვნით, რომ საქმე გვაქვს ორი ალგებრის პირდაპირ ნამრავლთან $O^+(3)\times O^+(3)$ რომელიც ექვივალენტურია 4-განზომილებიან ევკლიდის სივრცეში ბრუნვების ალგებრისა;

$$O^+(4) \sim O^+(3)\times O^+(3)$$

კეპლერის პრობლემის დინამიკური სიმეტრიის თეორიულ-ჯგუფური კლასიფიკაცია პირველად დადგენილი იყო საბჭოთა ფიზიკოსის აკად. ვ. ფოკის მიერ [22] წყალბადის ატომის კვანტურ-მექანიკურ ამოცანაში. ქვემოთ ნაშრომის კვანტურ-მექანიკურ ნაწილში უფრო დეტალურად განვიხილავთ ამ საკითხებს.

ახლა უფრო ღრმად ჩავიხედოთ ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის ფიზიკურ და გეომეტრიულ შინაარსში.

გ) ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის ფიზიკური და გეომეტრიული შინაარსი

თურმე შესაძლებელია არარელატივისტური კეპლერის პრობლემის დინამიკური სიმეტრიის სათავეები ვეძებოთ ფარდობითობის სპეციალური თეორიის კლასიკურ ინვარიანტულ პრინციპებში [23]. ამისათვის უნდა გვახსოვდეს, რომ არარელატივისტური კეპლერის ამოცანა არის რელატივისტური ორი ნაწილაკის ამოცანის ნულოვანი მიახლოება. ამიტომ აუცილებელია შესწავლილ იქნას რელატივისტური 2 ნაწილაკის ამოცანა, რათა აღმოვაჩინოთ კეპლერის არარელა-ტივისტური ამოცანის კავშირი ფარდობითობის სპეციალურ თეორიასთან. ამისათვის ფარდობითობის სპეციალურ თეორიას განვიხილავთ $\frac{1}{c^2}$ მიახლოებაში, რაც პირველად გააკეთა დარვინმა 1920 წელს [24]. ამ მიახლოებას ხშირად პოსტ-ნიუტონისეულ მექანიკას უწოდებენ.

ელექტრომაგნიტური N-ნაწილაკის ამოცანის ინვარიანტულობის ჯგუფია არაერთგვაროვანი ლორენცის ჯგუფი (პუანკარეს ჯგუფი). ცნობილია, რომ ამ ჯგუფს, როგორც 10 პარამეტრიანს, აქვს სიმეტრიის 10 გენერატორი, სრული იმპულსი $\vec{P}$ და სრული ენერგია $\mathcal{H}$ გენერირებენ ტრანსლაციებს სივრცესა და დროში და ერთად ადგენენ 4-ვექტორს $P_\mu = (\vec{P}, \frac{1}{c}\mathcal{H})$. $\vec{P}$ და $\mathcal{H}$ ტრანსლაციის ქვეჯგუფს შეესაბამება. ესაა არაერთგვაროვანი ნაწილი პუანკარეს ჯგუფისა. ერთგვაროვანი ლორენცის ჯგუფის გენერატორებია 3-სივრცეში ბრუნვების სრული მომენტის $\vec{L}$ ვექტორი და პოლარული ვექტორი $\vec{K}$, რომელიც გენერირებს წმინდა ლორენცის გარდაქმნებს (ე.წ. ბუსტებს) და $\vec{L}$-თან ერთად ადგენს ანტისიმეტრიულ 4-ტენზორს, $(\vec{L}, c\vec{K})$. ქვემოთ ნაჩვენები იქნება, რომ **პოსტ-ნიუტონისეულ მექანიკაში $\vec{K}$-ს გამოსახულება მასათა ცენტრის სისტემაში დაემთხვევა ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორს**.

განვიხილოთ N ნაწილაკის, როგორც ელექტრომაგნიტური (დამუხტული) სისტემის პოსტ-ნიუტონისეული აღწერა. ცხადია, მისი ექვივალენტური იქნება გრავიტაციული ურთიერთქმედებების აღწერაც.

დარვინის ლაგრანჟიანს სისტემისათვის მუხტებით $q_1, q_2, \ldots q_N$ და მასებით $m_1, m_2, \ldots m_N$ აქვს შემდეგი სახე;

$$\mathcal{L} = -\sum_i m_i c^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \upsilon_i^2 + \frac{1}{8c^2}\sum_i m_i \upsilon_i^4 - \frac{1}{2} + \sum_{i \neq j}{}' \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$+ \frac{1}{4c^2}\sum_{i,j}{}' q_i q_j \left(\frac{(\vec{\upsilon}_i \cdot \vec{\upsilon}_j)}{r_{ij}} + \frac{(\vec{\upsilon}_i\, \vec{r}_{ij})(\vec{\upsilon}_j\, \vec{r}_{ij})}{r_{ij}^3}\right) \tag{I.2.გ.1}$$

სადაც შტრიხი აჯამვის ნიშანთან მიგვითითებს იმაზე, რომ i=j შემთხვევა გამორიცხულია, $\vec{\upsilon}_i$ არის i-ური ნაწილაკის სიჩქარე, რომლის რადიუს-ვექტორია $\vec{r}_i$ და $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$

$\vec{r}_i$ -სთან დაკავშირებული განზოგადებული იმპულსია

$$\vec{P}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\upsilon}_i} = m_i \vec{\upsilon}_i + \frac{m_i \vec{\upsilon}_i^{\,2}}{2c^2}\vec{\upsilon}_i + \frac{1}{2c^2}\sum_{i,j}{}' q_i q_j \left(\frac{\vec{\upsilon}_i}{r_{ij}} + \frac{\vec{\upsilon}_j \vec{r}_j}{r_{ij}^{\,3}}\vec{r}_{ij}\right) \qquad \text{(I.2.გ.2)}$$

ჰამილტონიანი აიგება ჩვეულებრივი გზით

$$\mathcal{H} = \sum_i \vec{\upsilon}_i \, \vec{p}_i - \mathcal{L}$$

და $1/c^2$ რიგში ტოლია

$$\mathcal{H} = \sum_i m_i c^2 + \sum_i \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i} - \frac{1}{c^2}\sum_i \frac{p^4{}_i}{8m^3{}_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}{}' \frac{q_i q_j}{r_{ij}} -$$
$$- \frac{1}{4c^2}\sum_{i,j}{}' \frac{q_i q_j}{m_i m_j}\left(\frac{\vec{p}_i \, \vec{p}_j}{r_{ij}} + \frac{(\vec{p}_i \, \vec{r}_i)(\vec{r}_j \, \vec{p}_j)}{r_{ij}^{\,3}}\right) \qquad \text{(I.2.გ.3)}$$

სისტემის სრული იმპულსია

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}$$

ხოლო სრული კუთხური მომენტი,

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

ვ. ფოკის [25] თანახმად $\vec{K}$ ვექტორის ანალიზური გამოსახულება შეგვიძლია მივიღოთ ლაგრანჟიანის ვარიაციით, როცა სისტემაზე ტარდება ბუსტის გარდაქმნა. მიიღება

$$\vec{K} = -t\,\vec{P} + \sum_i m_i \vec{r}_i + \frac{1}{2c^2}\sum_i \frac{p_i^{\,2}}{m_i}\vec{r}_i + \sum_{i,j}{}' \frac{q_i q_j}{r_{ij}}\vec{r}_i \qquad \text{(I.2.გ.4)}$$

თუ i-ური ნაწილაკის ენერგიას განვსაზღვრავთ ასე

$$\varepsilon_i = m_i c^2 + \frac{p_i^{\,2}}{2m_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}{}' \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

და შემოვიტანთ ინერციის ცენტრის ვექტორს შემდეგი თანაფარდობით

$$\mathcal{H}\vec{R}_c = \sum_i \varepsilon_i \vec{r}_i\,, \qquad \text{(I.2.გ.5)}$$

მაშინ $\vec{K}$ მიიღებს სახეს

$$\vec{K} = \frac{\mathcal{H}}{c^2}\vec{R}_c - t\vec{P} \qquad \text{(I.2.გ.6)}$$

ამრიგად, $\vec{K}$-ს მუდმივობის ფაქტი განსაზღვრავს მასათა ცენტრის მოძრაობის კანონს.

ვხედავთ, რომ $\vec{K}$ ცხადად არის დამოკიდებული t დროზე, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა არჩეული გვაქვს სისტემა სრული ნულოვანი იმპულსით ანუ რელატივისტური ინერციის ცენტრის სისტემა, $\vec{P}$=0. ამ კერძო სისტემაში $\vec{K}$ ხდება დროზე დამოუკიდებელი მოძრაობის კონსტანტა.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ამ სისტემაში $\vec{K}$ არის ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი, რისთვისაც განვიხილოთ 2 ნაწილაკის ამოცანა. შემოვიტანოთ კოორდინატები

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_{21}}{m_1 + m_2}, \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

სათანადოდ იმპულსებია

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \qquad \vec{p} = \frac{m_2\,\vec{p}_1 - m_1\,\vec{p}_2}{m_1 + m_2}$$

შებრუნებულ თანაფარდობებს აქვს სახე

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{P}, \qquad \vec{p}_2 = -\vec{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{P},$$

ამ თანაფარდობათა გამოყენებით $\vec{K}$-ვექტორის ზემოთმოყვანილი გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\vec{K} = -t\,\vec{P} + (m_1 + m_2)\,\vec{R} + \frac{1}{c^2}\Big[\frac{\vec{P}^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{q_1q_2}{r}\Big]\vec{R} -$$

$$-\frac{1}{2c^2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\Big(\frac{\vec{p}^2}{\mu} + \frac{q_1q_2}{r}\Big)\vec{r} + \frac{1}{c^2}\frac{1}{m_1+m_2}(\vec{p}\,\vec{P})\,\vec{r},$$

სადაც $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ - დაყვანილი მასაა.

ინერციის ცენტრის სისტემაში ვღებულობთ

$$\vec{K} = (m_1+m_2)\,\vec{R} + \frac{1}{c^2}\Big(\frac{p^2}{2\mu} + \frac{q_1q_2}{r}\Big)\vec{R} - \frac{1}{2c^2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\Big(\frac{\vec{p}^2}{\mu} + \frac{q_1q_2}{r}\Big)\vec{r} \quad \text{(I.2.გ.7)}$$

ხოლო ჰამილტონიანი იღებს სახეს

$$\mathcal{H} = (m_1+m_2)c^2 + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{q_1q_2}{r} - \frac{1}{8c^2}\Big(\frac{1}{m_1^{\;3}} + \frac{1}{m_2^{\;3}}\Big)p^4 +$$

$$+\frac{q_1q_2}{2c^2}\frac{1}{m_1m_2}\Big(\frac{p^2}{r} + \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})^2}{r^3}\Big)$$

$1/c^2$ რიგში ვღებულობთ თანაფარდობას

$$\frac{1}{c^2}\mathcal{H} = m_1 + m_2 + \frac{1}{c^2}H \qquad \text{(I.2.გ.8)}$$

სადაც H არის არარელატივისტური ჰამილტონიანი

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{q_1q_2}{r} \qquad \text{(I.2.გ.9)}$$

ამიტომ $\vec{K}$ ასე გადაიწერება

$$\vec{K} = \frac{1}{c^2}\mathcal{H}\,\vec{R} - \frac{1}{2c^2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\Big(\frac{p^2}{\mu} + \frac{q_1q_2}{r}\Big)\vec{r}$$

შევნიშნოთ, რომ სრული მომენტის გამოსახულება ინერციის ცენტრის სისტემაში იღებს სახეს

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

ინერციის ცენტრის სისტემაში $\vec{P}$ აღარ არის დინამიკური ცვლადი. იგივე ეხება $\vec{R}$-საც. ჩვენს მიერ ზემოთ მიღებულ გამოსახულებებში $\mathcal{H}$ და $\vec{L}$ დამოუკიდებელია $\vec{R}$-ზე, მაგრამ ის $\vec{K}$-ში კვლავ შედის.

იმისათვის, რომ $\vec{K}$ იყოს სწორი დინამიკური ცვლადი, უნდა გამოვიყენოთ $\vec{R}$-ისთვის მოძრაობის განტოლება, როცა $\vec{P} \neq 0$ და შემდეგ განვიხილოთ ზღვარი, $\vec{P}$=0. ამ გზით $\vec{R}$ გამოიხატება $\vec{r}$ და $\vec{p}$ ფარდობითი ცვლადებით. რაკი $\mathcal{H}$ არის ჰამილტონიანი, შეგვიძლია გამოვიყენოთ $\vec{R}$-ისთვის მოძრაობის განტოლების მისაღებად,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{P}}\right)_{\vec{P}=0}$$

ანუ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \left[\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}_1} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}_2}\right]_{\vec{p}_1=\vec{p},\vec{p}_2=-\vec{p}}$$

რაც გვაძლევს

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{2c^2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{1}{\mu}[(\frac{p^2}{\mu} + \frac{q_1q_2}{r}]\vec{p} + \frac{q_1q_2}{r^3}\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})]$$

ამ განტოლების მიღება შეიძლებოდა აგრეთვე $\frac{d\vec{K}}{dt} = 0$ განტოლებიდან ზემოთ მოცემული ზოგადი $\vec{K}$-ს გამოსახულების გამოყენებით.

$1/c^2$ რიგში გვაქვს

$$\frac{1}{c^2}\dot{\vec{r}} = \frac{1}{c^2}\frac{\dot{\vec{p}}}{\mu}, \qquad \frac{1}{c^2}\dot{\vec{p}} = \frac{1}{c^2}\frac{q_1q_2}{r^3}\vec{r}$$

ამიტომ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{2c^2}\frac{m_1-m_2}{(m_1+m_2)^2}[\frac{p^2}{\mu}\dot{\vec{r}} + \frac{q_1q_2}{r}\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{p}}(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})]$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}[(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{p}]=\frac{1}{c^2}[(\vec{p}\cdot\vec{r})\dot{\vec{p}}+\frac{p^2}{\mu}\dot{\vec{r}}+\frac{q_1q_2}{r}\dot{\vec{r}}]$$

ამიტომ ვწერთ

$$\frac{d\,\vec{R}}{dt}=\frac{1}{2c^2}\frac{m_1-m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{1}{\mu}\frac{d}{dt}\left\{(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{p}\right\}$$

რაც ინტეგრაციის შედეგად იძლევა

$$\vec{R}=\vec{R}_0+\frac{1}{2c^2}\frac{m_1-m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{1}{\mu}(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{p}, \qquad \text{(I.2.გ.10)}$$

სადაც $\vec{R}_0$ ნებისმიერი მუდმივია და გამოხატავს მასათა ცენტრის მდებარეობას

$\dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{c^2}=0$ დროის მომენტში.

ამ გამოსახულების გათვალისწინება $\vec{K}$-ს ფორმულაში გვაძლევს ამ უკანასკნელის საბოლოო ფორმას;

$$K=\frac{1}{c^2}\mathcal{H}\,\vec{R}_0+\frac{1}{2c^2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{1}{\mu}(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{p}-$$

$$-\frac{1}{2c^2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}(\frac{p^2}{\mu}+\frac{q_1q_2}{r})\vec{r}$$

ან

$$\vec{K}=\frac{1}{c^2}\mathcal{H}\,\vec{R}_0-\frac{1}{2\mathrm{c}^2}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{A}, \qquad \text{(I.2.გ.11)}$$

სადაც

$$\vec{A}=(\frac{p^2}{\mu}+\frac{q_1q_2}{r})\vec{r}-\frac{1}{\mu}(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{p}=\frac{1}{\mu}[\vec{p}\times\vec{l}\,]+\frac{q_1q_2}{r}\vec{r} \qquad \text{(I.2.გ.12)}$$

$\vec{A}$, როგორც ვხედავთ, არის **ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი**.

ამრიგად, მივაღწიეთ საბოლოო მიზანს – ვაჩვენეთ, **რომ $\vec{A}$ ვექტორის ფორმა განისაზღვრება $\vec{K}$ ვექტორით ინერციის ცენტრის სისტემაში**.

როგორც ცნობილია, ფიზიკური სიდიდის მუდმივობა ნიშნავს, რომ მისი პუასონის ფრჩხილი ჰამილტონთან ნულის ტოლია.

ზემოთ მოყვანილ გამოსახულებებს თუ გამოვიყენებთ, კერძოდ, (I.2.გ.11)-ს, ადვილად დავადგენთ, რომ პუასონის ფრჩხილი

$$(\mathcal{H},\vec{K}) = -\frac{1}{2c^2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(\mathcal{H},\vec{A}) \qquad \text{(I.2.გ.13)}$$

ამიტომ ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორს ჰამილტონთან ექნება ნულოვანი პუასონის ფრჩხილი ანუ $\vec{A}$ ვექტორი შეინახება, თუ $(H,\vec{K})=0$.

მივიღეთ, რომ ბოლო 2 ნულოვანი ფრჩხილი ერთმანეთთანაა დაკავშირებული. ვაჩვენეთ, რომ ერთის შენახვა არის მეორის შენახვის ექვივალენტური.

ამრიგად, ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი რომ შეინახოს, დინამიკა უნდა ვითარდებოდეს ლორენცის არაერთგვაროვანი ჯგუფის მიხედვით, რაც ძალზედ ძლიერი მოთხოვნაა.

ეს შედეგი ახლოს მიდის არარელატივისტური კლასიკური მექანიკის ალგებრულ შედეგთან, რომლის მიხედვით კულონური ამოცანისთვის გვაქვს $O^+(4)$ სიმეტრია, რაც ლორენცის ჯგუფის ევკლიდურ ვერსიას წარმოადგენს.

ამრიგად, ვაჩვენეთ, რომ პოსტ-ნიუტონისეულ მექანიკაში ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი არის ბუსტების გენერატორის შემადგენელი ნაწილი და რომ ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის მუდმივობა დაკავშირებულია ინვარიანტულობასთან ლორენცის გარდაქმნების მიმართ.

თავი II.
ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში

II.1. პაულის ელექტრონი

პირველად ვ. პაულიმ [11] განსაზღვრა წყალბადის ატომის სპექტრი (მიიღო ბალმერის ფორმულა), გამოიყენა რა მატრიცული მექანიკის ალგებრული მეთოდები. ეს იყო მეტად მნიშვნელოვანი, მაგრამ მისი მნიშვნელობა (სიმეტრიების ტექნიკა) ბოლომდე არ იქნა გააზრებული სათანადოდ და ჩრდილში მოხვდა, რადგან იგივე პრობლემა მოგვიანებით ამოიხსნა შრედინგერის განტოლების გამოყენებით. შრედინგერის განტოლება იმ ეპოქის ფიზიკოსებისათვის უფრო მისაღები აღმოჩნდა და სწორედ ეს განტოლება გახდა დომინირებადი ათწლეულების განმავლობაში.

პაულის მეთოდი ფუნდამენტალური იყო სხვა თვალსაზრისითაც: მან ამოიცნო ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის როლი, რომელიც ასე განმარტა

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{2Ze^2m}(\vec{L}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{L})$$

როგორც ვხედავთ კვანტურ მექანიკაზე გადასვლისას გვიხდება შეცვლა

$$\vec{L}\times\vec{p} \to \frac{1}{2}(\vec{L}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{L})$$

და გადასვლა ოპერატორებზე.

საქმე იმაშია, რომ $\vec{L}$ და $\vec{p}$ ვექტორები კვანტურ მექანიკაში აღარ კომუტირებენ, ხოლო არაკომუტირებადი სიდიდეების ნამრავლი კვანტურ მექანიკაზე გადასვლისას უნდა გავიგოთ, როგორც ე.წ. **ვეილის მოწესრიგებული ნამრავლი** ანუ კლასიკური დინამიკური სიდიდეების ნამრავლი, რომლებიც არაკომუტირებადი გახდებიან კვანტურ მექანიკაში, უნდა შევცვალოთ ამ სიდიდეების **სიმეტრიზებული** ნამრავლით და შემდეგ გადავიდეთ კვანტურ ოპერატორებზე. ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის შემთხვევაში ასეთი გადასვლის შემდეგ ვრწმუნდებით, რომ მიღებული სიდიდე დარჩა ერმიტულ ოპერატორად და ამ თვალსაზრისით აღარ საჭიროებს რაიმე დამატებით მანიპულაციებს.

ამასთან ერთად გვაქვს კუთხური მომენტის ოპერატორი $\vec{L}=[\vec{r}\times\vec{p}]$, რომელიც ბრუნვების გენერატორია, ოღონდ პუასონის ფრჩხილების ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ კომუტატორები;

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k$$

ვმუშაობთ $\hbar = c = 1$ სისტემაში.

განვიხილოთ ახლა წყალბადის ატომის ამოცანის მთავარი ასპექტები:

ა) ალგებრული ასპექტები

Ze მუხტის ბირთვის კულონურ ველში მოძრავი ელექტრონის ჰამილტონიანი ასე ჩაიწერება

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \qquad \text{(II.1.ა.1)}$$

მოხერხებულია შემოვიტანოთ უგანზომილებო ცვლადები: სიგრძის ერთეულად ავირჩიოთ a/Z, სადაც $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ არის ბორის პირველი ორბიტის რადიუსი. $\vec{L}$ გავზომოთ $\hbar$ ერთეულებში, ხოლო $\vec{p}$ იმპულსი – ერთეულებში $\frac{\hbar Z}{a}$. მაშინ ჩვენთვის საინტერესო 3 ოპერატორი ჩაიწერება შემდეგი უგანზომილებო ფორმით:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{2}(\vec{L}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{L}) \qquad \text{(II.1.ა2)}$$

$$H = \vec{p}^2 - \frac{2}{r}$$

შევნიშნოთ, რომ როგორც კლასიკურ მექანიკაში, აქაც $\vec{A}$ ვექტორი არის ვექტორული ოპერატორი $\vec{L}$-ის მიმართ:

$$\lfloor L_i, A_{0j}\rfloor = i\varepsilon_{ijk}A_{ok} \qquad \text{(II.1.ა.3)}$$

ამავე დროს ამ ოპერატორის კვადრატი შემდეგ თანაფარდობას აკმაყოფილებს:

$$\vec{A}_0^{\,2} = \vec{A}_0\cdot\vec{A}_0 = H(\vec{L}^2+1)+1 \qquad \text{(II.1.ა.4)}$$

ეს არის კლასიკური ორბიტის განტოლების (I.2.ა.4) კვანტური ვერსია. რადგან $\vec{A}_0^{\,2}$ ინვარიანტულია ბრუნვების მიმართ (კომუტირებს $\vec{L}$-თან), $\vec{A}_0^{\,2}$-ის და L^2-ს ერთდროული დიაგონალიზაცია შეიძლება, რაც H-ის საკუთარი მნიშვნელობების პრობლემასაც გადაწყვეტს. ამიტომ ჩნდება მოტივაცია გამოითვალოს სხვადასხვა კომუტატორები. ადვილად დავამტკიცებთ, რომ ადგილი აქვს კომუტაციის თანაფარდობებს:

$$\begin{aligned}&\vec{L}\times\vec{L}=i\vec{L}\\&[L_i,A_{0j}]=i\varepsilon_{ijk}A_{0k}\\&\vec{A}_0\times\vec{A}_0=-i\vec{L}H\\&[H,\vec{L}]=[\vec{L},H]=0\end{aligned}\qquad\text{(II.1.ა.5)}$$

ამავე დროს კლასიკური მექანიკის ანალოგიური თანაფარდობა წარმოიქმნება:

$$\vec{L}\cdot A_0=0\qquad\text{(II.1.ა.6)}$$

არსებითია, რომ ზემოთ მოყვანილ კომუტაციის თანაფარდობებში მონაწილეობს H ჰამილტონიანიც. ამის გამო შეგვიძლია მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

მართალია, H ერმიტული ოპერატორია, ის არ არის დადებითად განსაზღვრული და ამიტომ მას შეიძლება ჰქონდეს დადებითი, ნულოვანი და უარყოფითი საკუთარი მნიშვნელობები:

$$H\psi_E=E\psi_E$$

ამიტომ კომუტაციის თანაფარდობების სტრუქტურა დამოკიდებული იქნება ენერგიის საკუთარ მნიშვნელობათა სივრცეზე, რომელზეც განხილული ოპერატორები მოქმედებენ. ამიტომ ზემოაღნიშნული კომუტაციის თანაფარდობების ინტერპრეტაციისათვის ჩვეულებრივი ლის ალგებრების დონეზე ჩვენ უნდა დავუშვათ, რომ **მდგომარეობის ვექტორების ვექტორული სივრცე, რომელზეც ეს ოპერატორები მოქმედებენ, არის ენერგიის საკუთარ მნიშვნელობათა სივრცე.**

ამ პირობების დასაკმაყოფილებლად, პირველ რიგში უნდა ვანორმიროთ $\vec{A}_o$ ოპერატორი: მის ნაცვლად განვიხილოთ ახალი ოპერატორი, განმარტებული ასე:

$$\vec{A}=\begin{cases}\vec{A}_0(-H)^{-1/2}, & \text{როცა } E<0\\ \vec{A}_0, & \text{როცა } E=0\\ \vec{A}_0(H)^{-1/2}, & \text{როცა } E>0\end{cases}\qquad\text{(II.1.ა.7)}$$

მაშინ გვექნება ლის ალგებრის შემდეგი ფორმა

$$\vec{L}\times\vec{L}=i\vec{L}$$

$$[L_i, A_j]=i\varepsilon_{ijk}A_k \qquad \text{(II.1.ა.8)}$$

$$\vec{A}\times\vec{A}=\varepsilon i\vec{L}$$

სადაც ε=1, 0, -1 არის ნიშნის ფუნქცია, იმის მიხედვით, თუ E<0 და E>0. ამის შედეგად ადრე მიღებული თანაფარდობები ასე გადაიწერება

$$(\vec{L}^2+\varepsilon\vec{A}^2+1)H=-1 \qquad ε=\pm1$$

$$H(\vec{L}^2+1)+1=\vec{A}^2 \qquad ε=0 \qquad \text{(II.1.ა.9)}$$

$$\vec{L}\vec{A}=0$$

ზემოთ, ალგებრული თანაფარდობების ჩასაწერად, გამოვიყენეთ ვექტორული ნამრავლის ფორმა, რაც გაუგებრობას არ გამოიწვევს.

დავადგინოთ ახლა სამივე ლის ალგებრა, რომლებიც შეესაბამებიან შემთხვევებს ε=+1, 0, -1.

(1) როცა ε=+1 (E<0) ზემო კომუტაციის თანაფარდობები შეესაბამებიან სტანდარტულ SO(4)⊃SO(3) ლის ალგებრას 4X4 ორთოგონალური მატრიცებისა, SO(4).

ზემოთ, განსაკუთრებით კლასიკურ მექანიკაში, ჩვენ გვაინტერესებდა ჩაკეტილი ორბიტები, ამიტომ ვიფარგლებოდით E<0 შემთხვევით.

თავის დროზე ვ. ფოკმა [22] აჩვენა, რომ SO(4) არის კეპლერის ამოცანის სიმეტრიის ჯგუფი, გადაწერა რა შრედინგერის განტოლება იმპულსურ სივრცეში ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების სახით და გამოიყენა ევკლიდური სივრცის სფერული ჰარმონიკები. შემდგომში ბარგმანმა [27] დააკონკრეტა, რომ ფოკის გარდაქმნის ინფინიტეზიმალური გენერატორებია კუთხური მომენტი $\vec{L}$ და ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი, $\vec{A}$.

კომუტაციის თანაფარდობებს შეიძლება ჩვეული სახე მივცეთ (როგორც ეს გავაკეთეთ კლასიკურ მექანიკაში), თუ შემოვიტანთ ახალ ბაზისს:

$$\vec{J}(1)=\frac{1}{2}(\vec{L}+\vec{A})$$

$$\vec{J}(2)=\frac{1}{2}(\vec{L}-\vec{A}) \qquad \text{(II.1.ა.10)}$$

მაშინ მივიღებთ ალგებრის ტრადიციულ SU(2)x SU(2) სახეს

$$\vec{J}(a)\times\vec{J}(a)=i\,\vec{J}(a) \qquad a=1,2$$

$$[\vec{J}(1),\vec{J}(2)]=0 \qquad \text{(II.1.ა.11)}$$

მაგრამ $\vec{L}\cdot\vec{A}=0$ თანაფარდობის გამო ამ ცალკეული ალგებრების ინვარიანტული ოპერატორები (ანუ, როგორც მათ ალგებრაში უწოდებენ – კაზიმირის ოპერატორები) $\vec{J}^2(1)$ და $\vec{J}^2(2)$ იგივურად ერთმანეთს ემთხვევიან

$$\vec{J}^2(1)=\vec{J}^2(2)=\frac{1}{4}(\vec{L}^2+\vec{A}^2) \qquad \text{(II.1.ა.12)}$$

ახლა უკვე შეგვიძლია მოვძებნოთ H-ის შესაძლო საკუთარი მნიშვნელობები E<0 შემთხვევისათვის. რადგან $\vec{J}$ (1) და $\vec{J}(2)$ ოპერატორები ერმიტულია, $J^2(1)$ და $J^2(2)$ ოპერატორების საკუთარი მნიშვნელობები იქნება, შესაბამისად, $j_1(j_1+1)$ და $j_2(j_2+1)$. ამავე დროს $J^2(1)=J^2(2)$ შეზღუდვა განაპირობებს ერთადერთ ამონახსნს $j_1=j_2=j$. ამავე შეზღუდვიდან და ოპერატორებს შორის (II.1.ა.9) თანაფარდობიდან მოიძებნება ენერგიის სპექტრი:

$$E=-\frac{1}{(2j+1)^2} \qquad \text{(II.1.ა.13)}$$

სადაც j=$\{$ 0, 1/2, 1, 3/2, ... $\}$

მიღებული შედეგი შეესაბამება წყალბადის ატომის ბმულ მდგომარეობებს. ამასთან მთელი რიცხვი 2j+1 უნდა გავაიგივეოთ ბმული მდგომარეობების სპექტრის შესაბამის მთავარ კვანტურ რიცხვთან, n (ბალმერის ფორმულა).

(2) როცა ε=-1 (E>0) კომუტაციის თანაფარდობებს აქვთ სტანდარტული SO(3,1)$\supset$SO(3) ლის ალგებრის ფორმა, რომელიც ექვივალენტურია ლორენცის ჯგუფის ლის ალგებრისა. ამ შემთხვევაში საკუთარი მნიშვნელობები მოიძებნება შეცვლით:

დისკრეტული მთავარი კვანტური რიცხვი n(=2j+1)$\Rightarrow\pm i\eta$, სადაც η არის ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი (0<$\eta<\infty$).

(3) როცა ε=0 (E=0) ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის $\vec{A}=\vec{A}_0$ ცალკეული კომპონენტები ერთმანეთთან კომუტირებენ და $\vec{A}_0$ კვლავ ვექტორია $\vec{L}$-ის მიმართ. სიმეტრიის ჯგუფია 3–განზომილებიანი ევკლიდური ჯგუფი.

ზემოთ მოყვანილ 3 შემთხვევას მათემატიკურ ლიტერატურაში უწოდებენ სფერულ, ჰიპერბოლურ და პარაბოლურ გეომეტრიებს, შესაბამისად. ისინი კარგადაა შესწავლილი და აღწერილი სათანადო ლიტერატურაში [4,28].

ჩვენ შემდგომშიც დაგვაინტერესებს მხოლოდ პირველი – სფერული გეომეტრიის შემთხვევა (E<0), რომელიც კლასიკურ ფიზიკაში ჩაკეტილ ორბიტებზე მოძრაობას შეესაბამება.

ამავე დროს დაგვაინტერესებს მხოლოდ ამოცანის **ალგებრული ასპექტები**, როცა სპექტრი მიიღება მოძრაობის განტოლებების ამოუხსნელად.

უკანასკნელი 30 წლის განმავლობაში ინტენსიური განვითარება ჰპოვა ე.წ. სუპერსიმეტრიულმა კვანტურმა მექანიკამ [29]. თვით სუპერსიმეტრიის კონცეფცია წარმოიშვა ელემენტარულ ნაწილაკთა თეორიაში როგორც სიმეტრია ბოზონებსა და ფერმიონებს შორის [30-32]. აშკარაა, რომ ამ ტიპის სიმეტრიას ნაწილაკთა ფიზიკაში თავდაპირველად არავითარი მოტივაცია არ ჰქონდა ექსპერიმენტული თვალსაზრისით. მაგრამ განსაკუთრებული მათემატიკური (ალგებრული) სტრუქტურის გამო ფიზიკოს-თეორეტიკოსთა შორის დაინტერესება ამ ახალი ტიპის სიმეტრიით ყოველდღიურად მატულობს. ალგებრულად სუპერსიმეტრია იმით არის განსაკუთრებული, რომ მისი ფორმულირებისათვის გენერატორებს შორის კომუტაციის თანაფარდობების გარდა საჭიროა განხილვა გარკვეული გენერატორების ანტიკომუტატორებისა. მათემატიკურ ენაზე სუპერსიმეტრიული ალგებრები მიეკუთვნებიან ე.წ. ლის **გრადუირებული ალგებრების** კატეგორიას. ამასთან გრადუირებას განსაზღვრავენ **ანტიკომუტატორები სუპერმუხტებს შორის**.

თავის დროზე ე. ვიტენმა [13] დაადგინა, რომ ჩვეულებრივ კვანტურ მექანიკაში შესაძლებელია სუპერსიმეტრიული (ე.წ. ვიტენის, როგორც ახლა უწოდებენ) ალგებრის რეალიზაცია, რომელიც ერთგანზომილებიან შემთხვევაში პრაქტიკულად ყველა პოტენციალისათვის ხერხდება და ტოლფასია დარბუს ფაქტორიზაციის მეთოდისა მე-2 რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში.

ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ წყალბადის ატომისათვის არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში სუპერსიმეტრიის რეალიზაციას. ეს ამოცანა შემდგომში

გამოგვადგება მეგზურად ნაწილაკების სპინის ჩასართველად და ამოცანის რელატივიზაციისათვის.

II.2. წყალბადის ატომის სუპერსიმეტრია არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში

როგორც ცნობილია, სუპერსიმეტრიის არსებობა ბოზონურთან ერთად ფერმიონულ თავისუფლების ხარისხებსაც მოითხოვს. ამიტომ განვიხილოთ პაულის ელექტრონი (წყალბადის ატომი სპინით). უცნაური ფაქტია, რომ უფრო ადვილია განვიხილოთ კულონურ ველში მოძრაობა პაულის ნაწილაკისა (ესაა არარელატივისტური 1/2-სპინიანი ნაწილაკი კინემატიკურად დამოუკიდებელი სპინით), ვიდრე უსპინო ნაწილაკისა. ეს გამარტივება იმითაა განპირობებული, რომ მომენტის $\vec{L}$ ოპერატორთან და ლაპლას-რუნგე-ლენცის $\vec{A}$ ოპერატორთან ერთად ვიყენებთ სპინის $\vec{\sigma}$ ოპერატორს.

ენერგიის საკუთარ მდგომარეობებს ახლა აქვთ სახე

$$\left|nlm\succ\otimes\right|\frac{1}{2},\mu\succ$$

ანუ, ექვივალენტურად, გვაქვს რადიალური ფუნქციის ნამრავლი პაული სპინ-ვექტორზე

$$R_{nl}Y^{(l\frac{1}{2})jm}$$

მთელ განხილვაში მეტად მნიშვნელოვან როლს ასრულებს დირაკის K ოპერატორი, რომელიც აქ ასეა განსაზღვრული

$$K=-(\vec{\sigma}\vec{L}+1)=\vec{L}-\vec{J}-1/4 \qquad \text{(II.2.1)}$$

სადაც $\vec{j}$ არის სრული მომენტი, $\vec{j}=\vec{L}+\frac{1}{2}\vec{\sigma}$. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ როგორც კუთხური, ასევე სრული მომენტი გამოიხატება K-ს კვადრატული ფორმით:

$$\vec{L}=K(K+1) \qquad \text{და} \qquad \vec{j}=K^2-1/4 \qquad \text{(II.2.2)}$$

K ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები κ ადვილად მოიძებნება განმარტებიდან. ესაა მთელი რიცხვები ნულის გამოტოვებით

$$\kappa = \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots \qquad \text{(II.2.3)}$$

ამ მნიშვნელობათა მოძებნის შემდეგ l და j კვანტური რიცხვები ასეთია

$$l = l(\kappa) = |\kappa| + \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}\kappa - 1)$$
$$j = j(\kappa) = |\kappa| - 1/2 \qquad \text{(II.2.4)}$$

სადაც აღნიშნავს κ-ს ნიშანს.

ამის გამო პაულის სპინორი შეგვიძლია დავახასიათოთ κ და m კვანტური რიცხვებით:

$$\chi_m^\kappa = Y^{(l(\kappa)\frac{1}{2}j(\kappa)m}, \qquad \text{(II.2.4.ბ)}$$

სადაც κ-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის m მაგნიტური კვანტური რიცხვი ($\vec{j}$-ს პროექცია, j_z) იღებს მნიშვნელობებს

$$\text{m}=|\kappa| - 1/2, |\kappa| - 3/2, \ldots, -|\kappa| + 1/2 \qquad \text{(II.2.5)}$$

როგორც ითქვა, სუპერსიმეტრიის ასაგებად უნდა გვქონდეს ანტიკო-მუტირებადი ოპერატორი, რათა მოვახდინოთ ალგებრის გრადუირება.

ჩვენ შემთხვევაში ჰილბერტის სივრცეში Z_2-გრადუირების შემოტანა შესაძლე-ბელია $P_\kappa = \dfrac{K}{|\kappa|}$ ლუწობის ოპერატორის მიხედვით მდგომარეობების დაყოფით ლუწ და კენტ მდგომარეობებად (ოპერატორებად). Pκ ოპერატორს აქვს საკუთარი მნიშვნელობები $\pm\operatorname{sgn}\kappa$. ამიტომ გრადუირების წრფივ ოპერატორს მივაწერთ ჩვეულებრივი შინაარსით: ოპერატორი არის **ლუწი**, თუ ის კომუტირებს P_x -თან, მაშინ როცა ოპერატორი არის **კენტი**, თუ ის ანტიკომუტირებს P_x-თან. ლუწი ოპერატორის მაგალითია H ჰამილტონიანი, რომელიც კომუტირებს K-თან. ცხადია, რომ K თავისთავად აგრეთვე ლუწია.

კენტი ოპერატორის საპოვნელად გამოვიყენოთ შემდეგი თეორემა [4]

თეორემა: ვთქვათ, $\vec{V}$ არის ვექტორი $\vec{L}$ კუთხური მომენტის მიმართ:

$$[L_i, V_j] = i\varepsilon_{ijk}V_k \rightarrow \quad \vec{L}\times\vec{V} + \vec{V}\times\vec{L} = 2i\vec{V}$$

ამავე დროს ის იყოს $\vec{L}$-ის პერპენდიკულარული:

$$\vec{L}\cdot\vec{V} = \vec{V}\cdot\vec{L} = 0$$

მაშინ K ანტიკომუტირებს სიდიდესთან $\vec{\sigma}\cdot\vec{V}$, რომელიც არის სკალარი $\vec{j}$-ს მიმართ.

ამ თეორემის დამტკიცება ძალზედ მარტივია. ჩვენ შემდგომში მოვიყვანთ მას მხოლოდ ამ ოპერატორის განზოგადების შემთხვევაზე დირაკის განტოლებისათვის [7].

ამავე დროს შევნიშნოთ, რომ თეორემის პირობებში ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან თანაფარდობას

$$K(\vec{\sigma}\vec{V})=\frac{1}{2}\vec{\sigma}((\vec{L}\times\vec{V}-\vec{V}\times\vec{L}) \qquad \text{(II.2.6)}$$

ამ თეორემის პირობებს აკმაყოფილებენ მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევები, როცა $\vec{V}=\hat{\vec{r}},\vec{p}$ ან $\vec{A}$.

ქვემოთ, რელატივისტური შემთხვევის განხილვისას, ჩვენ გამოვიყვანთ (II.2.6) ფორმულის რელატივისტურ განზოგადებას. ამიტომ აქ აღარ მოგვყავს ფორმულის მტკიცება.

ამრიგად, დამტკიცებული თეორემის თანახმად ვიპოვეთ კენტი ოპერატორები $(\vec{\sigma}\vec{V})$ სახით.

განვიხილოთ ახლა კენტი ოპერატორი $\vec{S}\cdot\vec{A}_0$, სადაც

$$\vec{A}_0=\frac{1}{2}(\vec{p}\times\vec{L}-\vec{L}\times\vec{p})-\hat{\vec{r}}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$(\vec{S}\cdot\vec{A}_0)^2=\frac{1}{2}HK^2+1/4, \qquad \text{(II.2.7)}$$

სადაც გამოვიყენეთ $\vec{A}_0^{\,2}$-თვის ზემოთ მიღებული ფორმულა, (II.1.ა.4)

შემოვიფარგლოთ ახლა κ-ს ფიქსირებული მნიშვნელობების ქვესივრცით $\mathcal{H}_\kappa$ მაშინ ზემოთ მიღებული თანაფარდობა ასე გადაიწერება:

$$2(\frac{\vec{S}\cdot\vec{A}_0}{\kappa})^2=H+\frac{1}{2\kappa^2} \qquad \text{(II.2.8)}$$

თუ ახლა განვმარტავთ სუპერმუხტს შემდეგი სახით

$$Q_1 = \frac{\vec{S}\vec{A}_0}{\kappa} \qquad \text{(II.2.9)}$$

რომელიც, როგორც თეორემა ცხადყოფს, არის კენტი ოპერატორი, მისი კვადრატი მუდმივი შესაკრების სიზუსტით დაემთხვევა ჰამილტონიანს. ცხადი სახით ანტიკომუტატორი

$$\{Q_1, Q_1\} = \widetilde{H} \qquad \text{(II.2.10)}$$

სადაც

$$\widetilde{H} = H + \frac{1}{2\kappa^2} \qquad \text{(II.2.11)}$$

რადგან Q_1 კენტია, ხოლო $\widetilde{H}$ ლუწი, მეორე სუპერმუხტი შეგვიძლია ასე შემოვიტანოთ

$$Q_2 = iQ_1 P_\kappa = \frac{i}{\kappa}(\vec{S}\vec{A}_0)K \qquad \text{(II.2.12)}$$

ამით დავასრულებთ S(2) სუპერსიმეტრიის აგებას.

ხშირად უფრო მოსახერხებელია ე.წ. კიბური (გაჩენის და გაქრობის) ოპერატორები შემოვიტანოთ თანაფარდობებით

$$Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 \pm iQ_2) = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa}(\vec{S}\vec{A}_0)(1 \mp P_\kappa), \qquad \text{(II.2.13)}$$

ესენი ნილპოტენტური ოპერატორებია, $Q_\pm{}^2 = 0$.

შევნიშნოთ, რომ ლუწი მდგომარეობისათვის $Q_+=0$ და $Q_-=\dfrac{\sqrt{2}\vec{S}\cdot\vec{A}_0}{\kappa}$ მაშინ, როცა კენტი მდგომარეობებისათვის მათი როლები იცვლება.

ახლა მივუბრუნდეთ წყალბადის ატომის სპექტრს უკვე S(2) სუპერსიმეტრიის თვალსაზრისით.

როგორც ზოგადად ცნობილია, ჰამილტონიანის საკუთარი სივრცეები (საკუთარი ფუნქციების სივრცეები) მიეკუთვნებიან ამ ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენებს. S(2) სიმეტრიის დაუყვანადი წარმოდგენები ერთ ან ორგანზომილებიანია.

ჩვენ ზემოთ შემოვიტანეთ პაულის სპინორებისთვის χ_m^x ბაზისი, (II.1.4) თუ მასზე ვიმოქმედებთ კიბური ოპერატორებით $Q_\pm$, მივიღებთ ან ნულს, ან სიდიდეს $\frac{\sqrt{2}\vec{S}\cdot\vec{A}_0}{\kappa}$. უფრო მეტიც, რადგან დამტკიცებული თეორემის ძალით

$$\left\{K,\vec{S}\hat{\vec{r}}\right\}=0 \quad \text{და} \quad (\vec{S}\hat{\vec{r}})^2=1/4,$$

ვპოულობთ, რომ $(\vec{S}\hat{\vec{r}})\chi_m^x$ სპინორი კვლავ K ოპერატორის საკუთარი ფუნქციაა საკუთარი მნიშვნელობით κ ანუ ადგილი აქვს შემდეგ თვისებას

$$(\vec{S}\hat{\vec{r}})\chi_m^{\pm\kappa}=-\frac{1}{2}\chi_m^{\mp\kappa} \qquad \text{(II.2.14)}$$

ამიტომ $\mathcal{H}_\kappa$-ს იმ ქვესივრცეში, რომელშიც E და m ფიქსირებულია, მდგომარეობები გარდაიქმნებიან S(2) სუპერსიმეტრიის დაუყვანადი წარმოდგენებით. მართლაც, (II.1.8) ფორმულიდან ფაზების შესახებ სათანადო შეთანხმებით ვპოულობთ

$$\left(\frac{\sqrt{2}\,\vec{S}\cdot\vec{A}_0}{\kappa}\right)\Phi_{E,\pm\kappa,m}=-\left(E+\frac{1}{2\kappa}\right)^{1/2}\Phi_{E,\pm\kappa,m} \qquad \text{(II.2.15)}$$

ვხედავთ, რომ მულტიპლეტის განზომილებაა 2, გარდა შემთხვევისა $E=-\frac{1}{2\kappa^2}$, როცა განზომილება 1-ის ტოლია.

ამ უკანასკნელ განტოლებას შეიძლება მივცეთ რადიალური სახე, რისთვისაც გამოვიყენოთ დირაკის ცნობილი იგივეობა

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}=\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{r}}[(\hat{\vec{r}}\cdot\vec{p})-ir^{-1}(k+1)] \qquad \text{(II.2.16)}$$

საიდანაც მიიღება

$$\vec{S}\cdot\vec{A}_0=[1-k(i\hat{\vec{r}}\cdot\vec{p}+\frac{k+1}{r})](\vec{S}\cdot\hat{\vec{r}}) \qquad \text{(II.2.17)}$$

თუ ამას გამოვიყენებთ (II.1.ბ.15) განტოლებაში, ადვილად მივალთ შემდეგი სახის რადიალურ დიფერენციალურ განტოლებაზე

$$\frac{1}{\sqrt{2|\kappa|}}\left[1-|\kappa|\left(\frac{d}{dr}+\frac{|\kappa|+1}{r}\right)\right]R_{E(\kappa)}(r)=\left(E+\frac{1}{2\kappa^2}\right)^{1/2}R_{E(-\kappa)}(r)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $X_{El}(r) = rR_{El}(r)$. მაშინ ეს 2 განტოლება ($|\kappa| = \pm\kappa$) გაერთიანდება ასეთი ფორმით

$$\begin{pmatrix} 0, A^{-}(l) \\ A^{+}(l), 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{El}(r) \\ X_{El+1}(r) \end{pmatrix} = \sqrt{E + \frac{1}{(2l+1)^2}} \begin{pmatrix} X_{El}(r) \\ X_{El+1}(r) \end{pmatrix} \qquad \text{(II.2.18)}$$

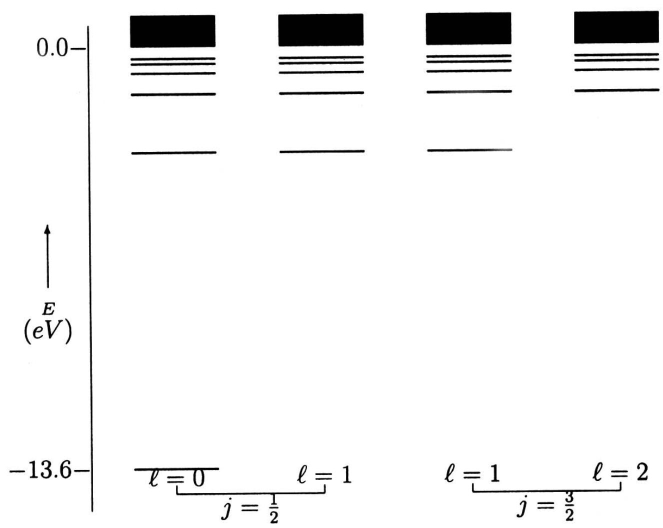
სადაც ჩავთვალეთ, რომ $\kappa = l + 1$ და შემოვიღეთ აღნიშვნები

$$A^{\pm}(l) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\pm \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} + \frac{1}{l+1} \right] \qquad \text{(II.2.19)}$$

ესენი არიან რადიალური კიბური ოპერატორები და ემთხვევიან შრედინგერის განტოლების ფაქტორიზაციის მეთოდით ამოხსნისას ნაპოვნ რადიალურ სუპერსიმეტრიულ ოპერატორებს კულონის ამოცანაში.

მათგან განსხვავებით აქ ამოხსნილია 3-განზომილებიანი ამოცანა, როცა სუპერმუხტები არ არიან რადიალური და მათთვის ℓ ცვლადი სიდიდეა, როგორც ეს ჩანს (II2. 14) განტოლებიდან.

ახლა უკვე შეგვიძლია არარელატივისტური 1/2-სპინიანი ნაწილაკის კულონური სპექტრის რეინტერპრეტაცია



ნახაზი 2.

წყალბადის ატომის არარელატივისტური სპექტრი. ყველა დონე ერთიდაიგივე j და m რიცხვებით ერთმანეთს უკავშირდება სუპერსიმეტრიით.

ა) დონეები გადაგვარებულია ფიქსირებული j და m რიცხვებით ამასთან l=j±1/2 ეს გადაგვარება არის S(2) სუპერალგებრის შედეგი. გადაგვარება ორჯერადია, გარდა მდგომარეობებისა l=j-1/2 და $E=-\frac{1}{2(l+1)^2}$, რომლებიც არ არის გადაგვარებული.

ბ) გადაგვარება ფიქსირებული l და m რიცხვებით (j=l ±1/2) გამოწვეულია არარელიტივისტურ რეჟიმში ელექტრონის სპინის კინემატიკური დამოუკიდებლობით.

გ) (2j+1)-ჯერადი გადაგვარება ფიქსირებული j და l რიცხვებით განპირობებულია ურთიერთქმედების ბრუნვითი ინვარიანტულობით.

ნათელია, რომ აუცილებელი ხდება ამოცანის რელატივიზაცია და ელექტრონის სპინის ისეთი განხილვა, სადაც ის უკვე აღარ იქნება კინეტიკურად დამოუკიდებელი.

თავი III.

ფარული სიმეტრია რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში – –პაულიდან დირაკისაკენ

ზემოთ ჩვენ ეტაპებად განვიხილეთ ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი და მასთან დაკავშირებული ალგებრული სიმეტრია კლასიკურ მექანიკასა და არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში. ვნახეთ, რომ ორბიტების ჩაკეტილობა კლასიკურ მექანიკაში და წყალბადის ატომის სპექტრის გადაგვარება კვანტურ მექანიკაში დაკავშირებული იყო „ფარულ“ სიმეტრიასთან, რომელსაც გამოხატავდა ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის შენახვა. ამის გამო სიმეტრია იყო უფრო მაღალი, ვიდრე ბრუნვითი SO(3), სახელდობრ – SO(4).

რაც შეეხება რელატივისტურ მექანიკას, კარგად არის ცნობილი, რომ ეს სიმეტრია **ირღვევა** – ორბიტები აღარ ინარჩუნებენ ჩაკეტილობის და პერიოდულობის თვისებებს. რელატივისტური მექანიკის თანახმად ელიფსის დიდი ნახევარღერძი ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას და კულონური პოტენციალისთვისაც ტრაექტორია არ არის ჩაკეტილი, მოძრაობა ხდება რელატივისტურ როზეტებზე [25,33].

მიუხედავად ამისა, ირკვევა, რომ რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში (ანუ დირაკის განტოლების შემთხვევაში) ეს სიმეტრია მთლიანად არ ისპობა და გარკვეულ შეზღუდვებს ადებს ელექტრონის სპექტრს წყალბადის ატომში.

თავის დროზე **ზომერფელდმა** (1931წ.) [34] გამოიყვანა წყალბადის ატომის დონეების ფორმულა მბრუნავ საკოორდინატო სისტემაზე გადასვლით, რითაც მოახერხა გამოერიცხა რელატივისტური პრეცესია (როზეტული მოძრაობა) და მიიღო ჩაკეტილი ორბიტები [34,35]. როგორც ზემოთ განვიხილეთ, დამატებითი სიმეტრია, რომელიც ორბიტების ჩაკეტილობას განაპირობებდა, ლორენცის სპეციალური გარდაქმნებით (ბუსტებით) განისაზღვრებოდა. ამიტომ არ იყო გამორიცხული გვევარაუდა, რომ ლორენც-კოვარიანტულ დირაკის განტოლებას კვლავ ახასიათებდეს რაიმე ნარჩენი სიმეტრია.

მართლაც, 50-იან წლებში **ლიპმანმა და ჯონსონმა** [36] აღმოაჩინეს, რომ დირაკის ჰამილტონიანისათვის კულონურ ველში არსებობს მოძრაობის

სკალარული მუდმივა – ფსევდოსკალარული ინვარიანტი, რომლის თეორიას ავაგებთ ამ თავში.

შინაარსის თვითშეთანხმებულობისათვის და სისრულისათვის ჩვენ ვიხილავთ აგრეთვე დირაკის ჰამილტონიანისათვის დამახასიათებელ სიმეტრიების თანაფარდობებს.

III.1. დირაკის ჰამილტონიანის სიმეტრიის თვისებები

ცნობილია, რომ ცენტრალური სიმეტრიის ველში დირაკის ჰამილტონიანის შემთხვევაში ინახება სრული მომენტი $\vec{j}$. ეს ფაქტი აღწერილია ნებისმიერ სახელმძღვანელოში. ჩვენ აქ გავიმეორებთ ზოგიერთ მათგანს, რათა გამოყენებული აღნიშვნები გახდეს ადვილად გასაგები.

ავიღოთ ჰამილტონიანი

$$H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m + V(r)$$

ჩვენ ხელთ არის ფუნდამენტალური (ამოსავალი) კომუტაციის თანაფარდობანი

$$[r_i, p_j] = i\delta_{ij}; \qquad l_i = \varepsilon_{imn} r_m p_n$$

$$[r_i, l_j] = i\varepsilon_{ijk} r_k; \qquad [l_i, r_j] = i\varepsilon_{ijk} r_k$$

$$[p_i, l_j] = i\varepsilon_{ijk} p_k; \qquad [l_i, p_j] = i\varepsilon_{ijk} p_k$$

ამ კომუტატორებიდან გამომდინარე გვაქვს

$$[l_i, H] = [l_i, \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m + V(r)] = [l_i, \vec{\alpha}\vec{p}] = i\varepsilon_{ijk}\alpha_j p_k \qquad \text{(III.1.1)}$$

შემოვიტანოთ სპინის მატრიცა:

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \qquad \text{(III.1.2)}$$

აქ და შემდგომ დირაკის მატრიცებისათვის ვიყენებთ დირაკის წარმოდგენას, სადაც:

$$\beta \equiv \alpha_4 \equiv \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\alpha} = \rho_1\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

პაულის σ_i მატრიცები აკმაყოფილებენ თანაფარდობებს:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

რაც α_i მატრიცებისთვის ნიშნავს:

$$\alpha_i\alpha_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\Sigma_k$$

ამავე დროს

$$\Sigma_i\alpha_j = \rho_1\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\alpha_k$$

ანუ
$$[\Sigma_i,\alpha_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\alpha_k$$

ამ თანაფარდობების გამოყენებით ვღებულობთ

$$[\Sigma_i, H] = [\Sigma_i, \vec{\alpha}\vec{p}] = -2i\varepsilon_{ijk}\alpha_j p_k \qquad \text{(III.1.2)}$$

თუ ამას განვიხილავთ (III.1.1)-თან ერთად, დავასკვნით, რომ სრული მომენტი

$$\vec{j} = \vec{l} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$$

კომუტირებს ჰამილტონიანთან

$$[j_i, H] = 0, \qquad (i = 1,2,3)$$

ჩვენ წინა ნაწილში გამოვიყენეთ დირაკის K ოპერატორის ანალოგი არარელატივისტური 1/2-სპინიანი ელექტრონისათვის. რელატივისტურ შემთხვევაში ამ ოპერატორს აქვს სახე [37]:

$$K = \beta(\vec{\Sigma}\vec{l} + 1) \qquad \text{(III.1.3)}$$

ამავე დროს ნათელია, რომ რადგან

$$\beta\vec{\Sigma} = \vec{\Sigma}\beta,$$

ამიტომ
$$\beta K = K\beta$$

ე.ი. დირაკის ოპერატორი კომუტირებს β მატრიცასთან

$$[\beta, K] = 0 \qquad \text{(III.1.4)}$$

ამავე დროს ეს ოპერატორი ანტიკომუტირებს γ_5 მატრიცასთან,

$$\{K, \gamma_5\} = 0$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ასეთნაირად შემოტანილი დირაკის ოპერატორი კომუტირებს ჰამილტონიანთან ნებისმიერ ცენტრალურ სიმეტრიის ველში. გამოთვლები ვაწარმოოთ ეტაპობრივად:

$$[K,H]=[\beta(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}+1),H]=[\beta(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}+1),\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m+V(r)=$$
$$=[\beta\vec{\Sigma}\cdot\vec{l},\vec{\alpha}\vec{p}]+[\beta,\vec{\alpha}\vec{p}]=$$
$$=\beta\Big\{(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})(\vec{\alpha}\vec{p})-(\vec{\alpha}\vec{p})(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})+(\vec{\alpha}\vec{p})(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})+(\vec{\alpha}\vec{p})\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}+2(\vec{\alpha}\vec{p})\Big\}=$$
$$=\beta\Big\{(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})(\vec{\alpha}\vec{p})+(\vec{\alpha}\vec{p})(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})+2\vec{\alpha}\vec{p}\Big\},$$

$$(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})(\vec{\alpha}\vec{p})+(\vec{\alpha}\vec{p})(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})=\Sigma_i\, l_i\alpha_j p_i+\alpha_j p_j\,\Sigma_i\, l_i=$$
$$=\Sigma_i\,\alpha_j l_i p_j+\alpha_j\,\Sigma_i\, p_j l_i=$$
$$=(\rho_1\delta_{ij}+i\varepsilon_{ijk}\alpha_k)l_i p_j+(\rho_1\delta_{ij}+i\varepsilon_{jik}\alpha_k)p_j l_i$$

პირველი წევრი $\rho_1\delta_{ij}$ მოგვცემს სკალარულ ნამრავლს $\vec{p}\vec{l}$, რაც ნულის ტოლია $(\vec{p}\vec{l})=0$, ამ ვექტორ-ოპერატორების ურთიერთმართობულობის გამო.

ამიტომ შესასწავლია დანარჩენი წევრები

$$i\varepsilon_{ijk}\alpha_k l_i p_j+i\varepsilon_{ijik}\alpha_k p_j l_i=i\alpha_k(\varepsilon_{kij}l_i p_j-\varepsilon_{kij}p_j l_i)=$$

= (ბოლო წევრში, i და j ურთიერთშევცვალოთ,(i⇆j)$=i(\vec{\alpha},[\vec{l}\times\vec{p}]+[\vec{p}\times\vec{l}])$,

მაგრამ

$$[\vec{l}\times\vec{p}]_k+[\vec{p}\times\vec{l}]_k=2ip_k \qquad \text{(III.1.5)}$$

ამიტომ ვღებულობთ, რომ

$$(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})(\vec{\alpha}\vec{p})+(\vec{\alpha}\vec{p})(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})=i(\vec{\alpha},[\vec{p}\times\vec{l}]+[\vec{l}\times\vec{p}])=$$
$$=i(\vec{\alpha}\cdot 2i\vec{p})=-2(\vec{\alpha}\vec{p}) \qquad \text{(III.1.6)}$$

ამის გათვალისწინებით (III.1.4) ფორმულაში, დავასკვნით, რომ

$$[K,H]=0 \qquad \text{(III.1.7)}$$

ამრიგად დირაკის K ოპერატორი კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან ნებისმიერი V(r) ცენტრალური ველის შემთხვევაში.

.

III.2 ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორი, როგორც დამატებითი სიმეტრიის მატარებელი კულონურ ველში

ლიტერატურაში, რომელიც ეხება დირაკის განტოლების სიმეტრიებს კულონურ ველში, მოყვანილია ე.წ. ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორი, რომელიც ცვლის კვანტური მექანიკის ანალოგიური პრობლემიდან ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორს. როგორც ქვემოთ დავინახავთ, თავისი შინაარსით დირაკის განტოლების შემთხვევაში შენახვადი იქნება არა თვითონ ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი, არამედ მისი გარკვეული კომბინაცია სპინის მატრიცებთან ანუ განზოგადებული სპირალურობის (helicity) ოპერატორი, როგორც მას დაარქვეს ნაშრომში [38]. ეს ოპერატორი შემოტანილი იყო უფრო ადრე ლიპმანის და ჯონსონის მოკლე შენიშვნაში [36]. შემდგომი თვალსაჩინოებისათვის სიტყვასიტყვით მოვიყვანთ ამ ნაშრომის ამონარიდს:

J6. **Relativistic kepler peroblem.** M.H.Johnson and B.A. Lippmann, *Naval Research Laboratory.* – Besides the usual integrals of motion, $\vec{M}$ and J (in Dirac's notation) the relativistic equations for a charge in a Coulomb field admit

$$A = \vec{\sigma} \cdot \vec{r} r^{-1} - i\left(\hbar c / e^2\right)^{-1}\left(mc^2\right)^{-1} J\rho_1\left(H - mc^2\rho_3\right)$$

as another integral of motion . Since A and J anticommute, the pairs of states with the same $|J|$ are degenerate. Thus the existence of A establishes the "accidental" degeneracy in the relativistic Kepler problem just as the existence of the axial vector establishes the degeneracy with respect to l in the corresponding non-relativistic problem".

პრაქტიკულად ესაა გამოსაქვეყნებლად მომზადებული ნაშრომის აბსტრაქტი (რეზიუმე). მას შემდეგ ამ ოპერატორის გამოყვანა სამეცნიერო ლიტერატურაში **არავის გამოუქვეყნებია**. მინიშნებულია მხოლოდ ხოლმე, რომ ეს ოპერატორი კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან კულონურ ველში, „რისი ჩვენებაც შეიძლება თურმე საკმაოდ გრძელი და დამქანცველი გამოთვლებით" [11,38].

ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორი თანამედროვე მატრიცულ აღნიშვნებში ასე ჩაიწერება

$$A = \gamma^5 \frac{\vec{\alpha}\vec{r}}{r} - \frac{i}{Z\alpha m} K\gamma^5 (H - \beta m) \qquad \text{(III.2.1)}$$

სადაც K - ზემოთ განხილული დირაკის ოპერატორია, ხოლო $Z\alpha$ არის კულონის ძალაში შემავალი პარამეტრი – მუხტების ნამრავლი.
ჰამილტონიანია

$$H = \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m - \frac{a}{r}, \qquad a \equiv Z\alpha \qquad \text{(III.2.2)}$$

რადგან A-ს კომუტირება H-თან გრძელი დასამტკიცებელია, ჩვენ ის გავიტანეთ **I-დამატებაში.**

I დამატებაზე დაყრდნობით ვასკვნით, რომ

$$[A, H] = 0 \qquad \text{(III.2.3)}$$

ამრიგად, **ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორი კიდევ ერთი დამატებითი შენახვადი სიდიდე ყოფილა დირაკის განტოლებისათვის გარეშე კულონურ ველში.** მისი არსებობა პირდაპირაა დაკავშირებული დონეების ორჯერად გადაგვარებასთან დირაკის K ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობების ორი ნიშნის გამო.

III.3. წყალბადის ატომის სუპერსიმეტრია რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში

ახლა შეგვიძლია ვიმოქმედოთ წინა თავში აღწერილი პაულის ელექტრონის მოდელის მსგავსად. დაგვჭირდება A ოპერატორის კვადრატის გამოთვლა, რაც დაწვრილებით არის გამოყვანილი **II დამატებაში.** მას აქვს შემდეგი სახე:

$$A^2 = 1 + \left(\frac{K}{Z\alpha}\right)^2 \left(\frac{H^2}{m^2} - 1\right) \qquad \text{(III.3.1)}$$

ეს თანაფარდობა კიდევ იმითაა საინტერესო, რომ იძლევა ენერგიისათვის **ალგებრულ ამონახსნს**, როგორც ეს გვქონდა ხოლმე შრედინგერის განტოლებაში ან კლასიკურ მექანიკაში [2,39].

მართლაც, თუ გვეცოდინება A^2 ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები, ვიპოვით დირაკის ჰამილტონიანის საკუთარ მნიშვნელობებს ისე, რომ არ დაგვჭირდება მოძრაობის განტოლების ამოხსნა. ამ ფორმულაში შეიძლება ყველა შემავალი ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობებზე გადასვლა, რადგან ყველა

მათგანი კომუტირებს H-თან და ერთმანეთთან. ამიტომ ენერგიის საკუთარი მნიშვნელობებისათვის გვაქვს;

$$\frac{E^2}{m^2} = 1 + (\frac{Z\alpha}{\kappa})^2 (A^2 - 1), \qquad \text{(III.3.2)}$$

სადაც κ არის K ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობა.

რადგან m არის H–ის უმდაბლესი საკუთარი მნიშვნელობა, ვხედავთ, რომ ერმიტული ოპერატორი A^2 ამავე დროს დადებითადაა განსაზღვრული. ამიტომ შეგვიძლია სუპერსიმეტრიულ სურათში ჩავთვალოთ ვიტენისეულ ჰამილტონიანად.

$$A^2 = \hbar,$$

როგორც ეს მოხდა პაულის ელექტრონის მაგალითში (თავი II).

შევაჯამოთ ახლა მიღებული კომუტაციის თანაფარდობები:

– ვაჩვენეთ, რომ $\{A, K\} = 0$, ანტიკომუტირებენ.

– ორივე მათგანი კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან და განსაზღვრავენ სიმეტრიას.

შემოვიტანოთ სუპერმუხტები შემდეგი თანაფარდობებით [6,10,11,23]:

$$Q_1 = A_1, \qquad Q_2 = i\frac{AK}{\kappa}$$

აშკარაა, რომ $Q_2^2 = -\frac{AKAK}{\kappa^2} = A^2$

ანუ

$$Q_1^2 = Q_2^2 = A^2 = \hbar$$

გარდა ამისა

$$\{Q_1, Q_2\} = 0$$

ამრიგად მივიღეთ ვიტენის S(2) ალგებრა (ანუ N=2 სუპერსიმეტრია).

შეგვიძლია ჩვეულებრივად შემოვიტანოთ ნილპოტენტური კიბური ოპერატორები

$$Q_\pm = \frac{1}{2}(Q_1 \pm Q_2)$$

ნათელია, რომ

$$Q_\pm^{\ 2} = 0 \quad \text{და} \quad H = \{Q_+, Q_-\}$$

ამასთან შეგვიძლია მოვითხოვოთ, რომ A^2 ოპერატორის უმდაბლესი საკუთარი მნიშვნელობაა 0, ხოლო მდგომარეობა |0>

$$A|0\rangle=0$$

ამიტომ ძირითადი მდგომარეობის ენერგიისათვის მიიღება;

$$\frac{E}{m}=\sqrt{1-(\frac{Z\alpha}{\kappa})^2}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{Z\alpha}{s})^2}}, \qquad \text{(III.3.4)}$$

სადაც

$$s\equiv\sqrt{\kappa^2-(Z\alpha)^2} \qquad \text{(III.4.5)}$$

(III.3.4) გამოსახულება ემთხვევა წყალბადისებრი ატომის ძირითადი მდგომარეობის ენერგიას.

სპექტრის ზოგადი ფორმულის მისაღებად შეგვიძლია ვისარგებლოთ გაჩენის ოპერატორის მეთოდით ანუ როგორც უწოდებენ, კიბის მეთოდით. მეთოდი დაიყვანება s→s+1 შეცვლაზე ყოველი შემდეგი დონისათვის. ამის გამო ნებისმიერი დონის ენერგიისათვის ვღებულობთ შემდეგ გამოსახულებას [9]:

$$\frac{E}{m}=[1+\frac{(Z\alpha)^2}{(n-|\kappa|+\sqrt{\kappa^2-(Z\alpha)^2})^2}]^{-1/2} \qquad \text{(III.4.6)}$$

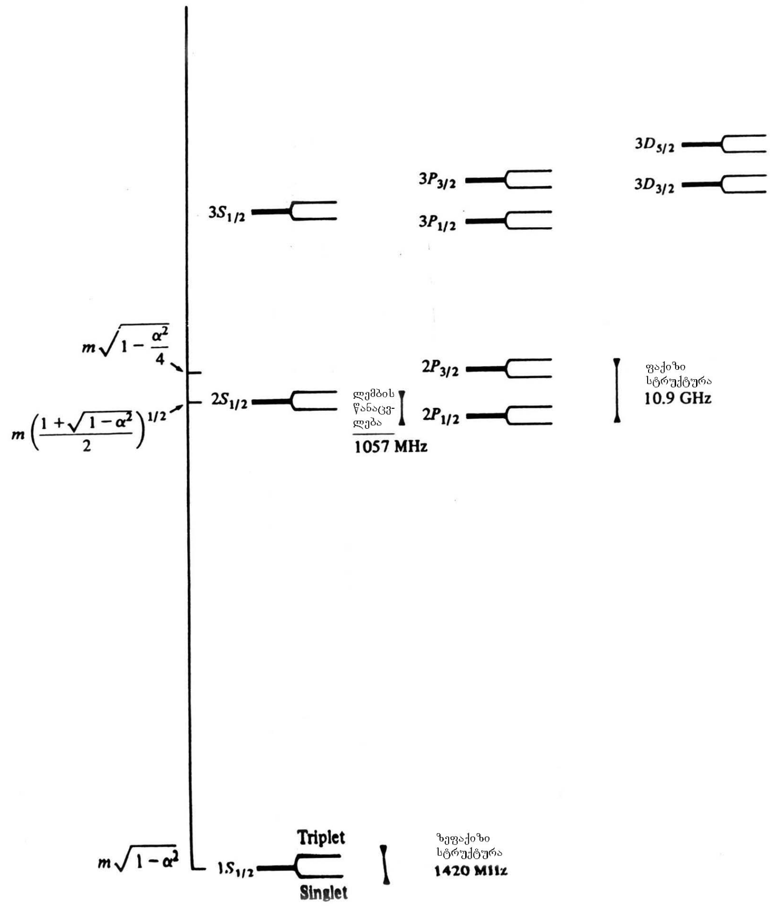
(n=1, 2, ...)

ეს გამოსახულებაც ემთხვევა წყალბადის ატომისათვის დირაკის განტოლების ამოხსნით მიღებულ საკუთარი მნიშვნელობების **ზომერფელდის** ფორმულას [34].

როგორც დავრწმუნდით, ამ შედეგის მისაღებად სრულებითაც **არ დაგვჭირდა** დირაკის განტოლების ამოხსნა. შედეგი მივიღეთ წმინდად **ალგებრულად**. შეგვეძლო სხვა გზითაც წავსულიყავით, სახელდობრ, მოგვეძებნა A ოპერატორის სპექტრი მისი განტოლების ამოხსნით, რაც აგრეთვე ადვილი გადასაწყვეტია [11,23]. მაგრამ ვიტენის ალგებრამ გვიკარნახა გაცილებით უფრო მარტივი მიდგომა.

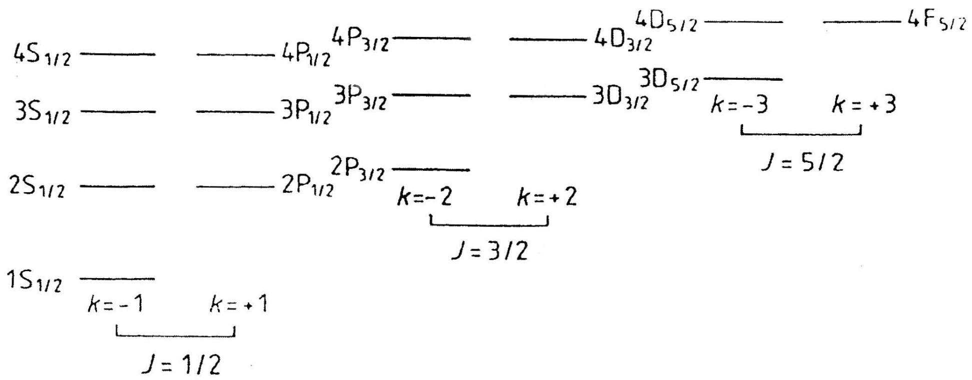
ჯგუფთა თეორიის თვალსაზრისით მიღებული შედეგი ნიშნავს შემდეგს: არარელატივისტურ წყალბადის ატომს ჰქონდა ფარული სიმეტრია (დაკავშირებული ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის შენახვასთან). ამის გამო ამოცანის სიმეტრია ამაღლდა და გახდა SO(4), ნაცვლად SO(3) სივრცული

სიმეტრიისა. როცა გადავდივართ რელატივისტურ შემთხვევაზე, სიმეტრია დაბლდება, ოღონდ დაბლდება ნაწილობრივ და ხდება SO(3)xS(2), იმის გამო, რომ გვაქვს N=2 სუპერსიმეტრია. ეს ძალიან საინტერესო ფაქტია, რადგან რელატივისტურ განზოგადოებას უნდა დაედაბლებინა სიმეტრია SO(3)-მდე. ამის ნაცვლად ფარულმა სიმეტრიამ თავი იჩინა სუპერსიმეტრიის სახით, რომელიც დაკავშირებულია ლიპმან-ჯონსონის შენახვადი ოპერატორის არსებობასთან. თუ შევხედავთ წყალბადის ატომის სპექტრის სურათს (ნახაზი 3, 4.). მათზე ნათლად ჩანს κ-ს ორი ნიშნის მიხედვით დონეების გადაგვარება.



ნახაზი 3

წყალბადის ატომის ქვედა დონეების სტრუქტურა



ნახაზი 4

S(2) სუპერსიმეტრიის დამახასიათებელი სურათი წყალბადის ატომის რელატივისტურ სპექტრში

სუპერსიმეტრია იმიტომ წარმოიქმნება, რომ სპექტრი დამოკიდებულია მარტო j-ზე (κ)-ზე. ამავე დროს ეს გადაგვარება განაპირობებს თანხვედრას დონეებისა, რომელთაც აქვთ ერთნაირი სრული j მომენტი, მაგრამ 1-ით განსხვავებული l ორბიტალური მომენტი. (მაგ. $nS_{1/2}$ – $nP_{1/2}$ გადაგვარება).

როგორც ცნობილია, სინამდვილეში ცდებზე დაკვირვებულია ამ დონეების გახლეჩა, ე.წ. ლემბის წანაცვლება. თეორიულად ლემბის წანაცვლების ახსნა ხერხდება მხოლოდ კვანტურ ელექტროდინამიკაში მაღალი რიგის რადიაციული შესწორებების გათვალისწინებით. სახელდობრ, ფოტონის პროპაგატორში და ფოტონ-ელექტრულ წვეროში ერთი მარყუჟის გათვალისწინება უკვე გვაძლევს შემდეგი სახის შესწორებებს ლემბის წანაცვლების მისაღებად [1]:

$$\Delta V_{eff} \approx \frac{4\alpha^2}{3m^2}(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{1}{5})\delta^3(\vec{r})+\frac{\alpha^2}{2\pi m^2 r^3}(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})$$

ადვილია იმაში დარწმუნება, რომ ამ წევრებთან A ოპერატორი აღარ კომუტირებს. ამრიგად, ლემბის წანაცვლების წევრების ჩართვა ჰამილტონიანში მაშინვე იწვევს ზემოთ მიღებული სიმეტრიული სურათის დარღვევას. ეს უფლებას გვაძლევს ვამტკიცოთ, რომ **ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორთან დაკავშირებული სიმეტრიის დარღვევა განაპირობებს ლემბის წანაცვლების წარმოქმნას დირაკის ჰამილტონიანში**.

აშკარაა, რომ დირაკის ჰამილტონიანში, როგორც ერთელექტრონიან თეორიაში ასეთი წევრები ვერ წარმოიქმნება და სანამ მხოლოდ კულონური პოტენციალი განიხილება, ყოველთვის გვექნება **ლემბის წანაცვლების კონტროლი**.

III. 4. ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორის თეორია.

ა) თეორემა ანტიკომუტირებადი ოპერატორის შესახებ

როგორც წინა პარაგრაფებიდან გახდა ნათელი კულონური ამოცანის დამატებითი სიმეტრიის რეალიზებაში მნიშვნელოვანია ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორი A, რომლის გამოყვანა სამეცნიერო ლიტერატურაში ჩვენამდე [6] არავის გამოუქვეყნებია. ქვემოთ გადმოცემული იქნება ამ ოპერატორის **რეგულარული თეორია**. დავიწყოთ იქიდან, რომ განვაზოგადოთ პაულის ელექტრონისათვის ცნობილი თეორემა [4,5] დირაკის განტოლებაზე.

თეორემა:

ვთქვათ $\vec{V}$ არის რაიმე ვექტორი $\vec{l}$ ორბიტალური მომენტის ოპერატორის მიმართ, ე.ი.

$$\left[l_i, V_j\right] = i\varepsilon_{ijk}V_k\,,$$

ანუ ვექტორულ აღნიშვნებში

$$\vec{l}\times\vec{V}+\vec{V}\times\vec{l} = 2i\vec{V}$$

ამავე დროს $\vec{V}$ იყოს $\vec{l}$-ის პერპენდიკულარული, ე.ი. $\left(\vec{l}\cdot\vec{V}\right)=\left(\vec{V}\cdot\vec{l}\right)=0$.

მაშინ დირაკის K ოპერატორი კომუტირებს შემდეგ (ფსევდო)სკა-ლარულ ოპერატორთან $\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)$, ე.ი.

$$\left\{K,\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)\right\}=0$$

დამტკიცება:

განვიხილოთ ნამრავლი $\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}\right)\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)$. დირაკის მატრიცების გადასმადობის თვისებების და აგრეთვე ამ თავის დასაწყისში მოყვანილი ფუნდამენტალური თანაფარდობების გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}\right)\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)=\left(\vec{l}\cdot\vec{V}\right)+i\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}\times\vec{V}\right)=i\left(\vec{\Sigma},2i\vec{V}-\vec{V}\times\vec{l}\right)=$$
$$=-2\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)-i\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\times\vec{l}\right)$$

ამიტომ

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}+1\right)\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)=-\left[\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)+i\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\times\vec{l}\right)\right] \qquad \text{(III.5.1)}$$

ახლა ეს ნამრავლი განვიხილოთ შებრუნებული მიმდევრობით

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}\right)=\left(\vec{V}\cdot\vec{l}\right)+i\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\times\vec{l}\right)=i\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\times\vec{l}\right)$$

გვაქვს

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}+1\right)=\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)+i\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\times\vec{l}\right)=-\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}+1\right)\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)$$

ბოლო ეტაპზე გამოვიყენეთ (III.5.1) ფორმულა. ამრიგად გვაქვს შემდეგი ანტიკომუტატორი

$$\left\{\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}+1,\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right\}=0$$

ახლა განმარტების ძალით ვპოულობთ

$$K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)=-\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)K \qquad \text{(III.5.2)}$$

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია.

მაგრამ ნათელია, რომ K-სთან ანტიკომუტირებადი (ანუ K-კენტი) ოპერატორების კლასი არ ამოიწურება მარტო დამტკიცებული სახის ოპერატორებით – ნებისმიერი $\hat{O}\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)$ ფორმის ოპერატორი, რომელშიც $\hat{O}$ არის K-სთან კომუტირებადი, აგრეთვე დააკმაყოფილებს თეორემის პირობებს და, მაშასადამე იქნება K-კენტი.

ბუნებრივია, გავიხსენოთ, რომ კენტი ოპერატორების ოჯახს მიეკუთვნება აგრეთვე დირაკის γ_5 მატრიცაც.

მიღებული თეორემის პირობებში ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან თანაფარდობას, რომელსაც შემდგომში გამოვიყენებთ:

$$K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{V}\right)=-i\beta\left(\vec{\Sigma}\cdot\frac{1}{2}\left[\vec{V}\times\vec{l}-\vec{l}\times\vec{V}\right]\right), \qquad \text{(III.5.3)}$$

რაც მარტივად გამომდინარეობს თეორემაში მოყვანილი თანაფარდობიდან ვექტორის გარდაქმნის შესახებ ვექტორული ნამრავლის ფორმით.

მარჯვნივ წარმოიქმნა ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორისათვის დამახასიათებელი ანტისიმეტრიზებული ვექტორული ნამრავლი. ჩვენ ხელთ არსებული ფიზიკურად საინტერესო ვექტორებიდან თეორემის პირობებს აკმაყოფილებენ შემდეგი ვექტორები $\vec{V} = \hat{\vec{r}},\ \vec{p},\ \vec{A}$. ზემოთმოყვანილი ფორმულის ძალით ამ სამი ვექტორისაგან მხოლოდ ორი დამოუკიდებელი ანტიკომუტირებადი ოპერატორის შედგენა შეიძლება, რადგან ადგილი აქვს ერთ თანაფარდობას მათ შორის

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{A}\right) = \vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}} + \frac{i}{ma}\beta K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right)$$

გარდა ამისა, აღვნიშნოთ, რომ ანტიკომუტირებად ოპერატორებთან ერთად ჩვენ შეგვიძლია აღვწეროთ დირაკის K ოპერატორთან კომუტირებადი ოპერატორებიც. ნათელია დირაკის მატრიცების თვისებებიდან, რომ ზემოაღნიშნული თეორემის პირობების ფარგლებში გვექნება აგრეთვე

$$\left[K, \vec{\alpha}\cdot\vec{V}\right] = 0 \qquad \text{(III.5.4)}$$

ამ თანაფარდობასაც შეიძლება ჰქონდეს პრაქტიკული გამოყენება.

ახლა ყველაფერი შემზადებული გვაქვს ფარული სიმეტრიის ოპერატორის გამოსაყვანად.

ბ) კულონურ ველში “ფარული” სიმეტრიის ოპერატორის გამოყვანა [6,7,40]

ჩვენი ამოცანაა ავაგოთ $K-$კენტი ოპერატორების ისეთი კომბინაცია, რომელიც იკომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან. ეს ამოცანა ამოვხსნათ მიმდევრობითი ნაბიჯებით. როგორც პირველი საცდელი გამოსახულება, ავიღოთ შემდეგი ოპერატორი

$$A_1 = x_1\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right) + i x_2 K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right)$$

აქ კოეფიციენტები ისეა შერჩეული, რომ A_1 ოპერატორი იყოს ერმიტული, როცა x_1, x_2 ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. ეს რიცხვები უნდა განისაზღვროს ამ ოპერატორის კომუტატივობიდან დირაკის ჰამილტონიანთან. გამოთვლა იძლევა

$$\left[A_1, H\right] = x_1\frac{2i}{r}\beta K\gamma_5 - x_2\frac{a}{r^2}K\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right)$$

ვხედავთ, რომ მარჯვენა მხარეში პირველი წევრი არის ანტიდიაგონალური მატრიცა, ხოლო მეორე წევრი კი – დიაგონალური. ამიტომ ეს გამოსახულება

ნულის ტოლი ვერ გახდება, თუ $x_{1,2}$ კოეფიციენტები ჩვეულებრივი ნამდვილი რიცხვები იქნებოდა.

უნდა გადაიდგას შემდგომი ნაბიჯი და საძიებელ ოპერატორში უნდა ჩავრთოთ სხვა კენტი სტრუქტურაც. ზემოთ მიღებული კომუტატორის მარჯვენა მხარე ფაქტიურად გვკარნახობს, რომ უნდა ჩავრთოთ დირაკის γ_5 მატრიცა. ამრიგად, გამოვცადოთ ახლა შემდეგი ოპერატორი

$$A_2 = x_1\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right) + ix_2K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right) + ix_3K\gamma_5 f(r)$$

აქ $f(r)$ ჯერჯერობით ნებისმიერი ფუნქციაა, რომელიც უნდა განისაზღვროს აგრეთვე კომუტირების მოთხოვნიდან. გამოვთვალოთ ახალი კომუტატორი. (ამ თანაფარდობაში შემავალი ცალკეული კომუტატორები გამოთვლილია **II დამატებაში)**

$$[A_2, H] = x_1\frac{2i}{r}\beta K\gamma_5 - x_2\frac{a}{r^2}K\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right) - x_3 f'(r)K\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right) - ix_3 2m\beta K\gamma_5 f(r)$$

დავაჯგუფოთ დიაგონალური და ანტიდიაგონალური წევრები ცალკ-ცალკე და მიღებული გამოსახულება გავუტოლოთ ნულს. მიიღება შემდეგი განტოლება

$$K\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\left(x_2\frac{a}{r^2} + x_3 f'(r)\right) + 2i\beta K\gamma_5\left(x_1\frac{1}{r} - x_3 mf(r)\right) = 0$$

ეს განტოლება რომ დაკმაყოფილდეს, დიაგონალური და ანტიდიაგონალური ელემენტები ცალკ-ცალკე უნდა გავუტოლოთ ნულს. მიიღება შემდეგი პირობები

$$x_1\frac{1}{r} = x_3 mf(r), \qquad\qquad x_2\frac{a}{r^2} = -x_3 f'(r).$$

უპირველეს ყოვლისა ვაინტეგროთ მეორე განტოლება (r,∞) საზღვრებში. მიიღება

$$x_3 f(r) = -\frac{a}{r}x_2$$

პირველ განტოლებაში ამის გათვალისწინებით გვაქვს

$$x_2 = -\frac{1}{ma}x_1.$$

გარდა ამისა, ვპოულობთ,

$$x_3 f(r) = -\frac{1}{mr}x_1.$$

ამრიგად, ყველა უცნობი სიდიდე განისაზღვრა, ხოლო კოეფიციენტები გამოიხატა ერთ-ერთის მეშვეობით. საბოლოოდ ოპერატორისათვის მივიღეთ შემდეგი გამოსახულება

$$A_2 = x_1 \left\{ \left(\vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{r}} \right) - \frac{i}{ma} K \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p} \right) + \frac{i}{mr} K \gamma_5 \right\}$$

ეს ოპერატორი, ჩვენი თეორემის თანახმად, არის K-კენტი. ამავე დროს ის კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან. ამრიგად ჩვენ არა მარტო გამოვიყვანეთ საძიებელი სიმეტრიის ოპერატორი, არამედ ერთდროულად ვაჩვენეთ მისი კომუტატივობა დირაკის ჰამილტონიანთან. ამასთან მტკიცების გზა საკმაოდ მარტივია და გამჭვირვალე.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ მოძებნილი სიმეტრიის ოპერატორი არ არის რაიმე ახალი. საკმარისია გავითვალისწინოთ დირაკის მატრიცებს შორის არსებული კავშირი $\vec{\Sigma} = \gamma_5 \vec{\alpha}$ და მიღებული ოპერატორი ადვილად მიიყვანება სახეზე (x_1, როგორც არაარსებითი რიცხვითი მამრავლი, შეგვიძლია ჩამოვუშვათ):

$$A_2 = \gamma_5 \left\{ (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{r}}) - \frac{i}{ma} K \gamma_5 \left(H - \beta m \right) \right\}$$

ეს გამოსახულება სხვა არაფერია, ვიდრე ზემოთ მოყვანილი ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორი.

თავი IV

ვიტენის ალგებრა და დირაკის ჰამილტონიანის უზოგადესი განხილვა

IV.I სიმეტრიის ოპერატორის დადგენა –კულონური პოტენციალის გამოყოფილი როლი

ჩვენ უკვე არაერთხელ აღვნიშნეთ წინა თავებში, რომ დირაკის K ოპერატორი კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან ნებისმიერ ცენტრალური სიმეტრიის ველში. ახლა შევისწავლით დირაკის ჰამილტონიანის დამატებითი სიმეტრიების საკითხს ნებიმიერი ცენტრალური ველისათვის. მსჯელობის სიცხადისა და სისრულისათვის მოგვიწევს ზოგიერთი თანაფარდობის თავიდან მოყვანა. კერძოდ, ამ ნაწილში დავუბრუნდებით დირაკის უზოგადეს ჰამილტონიანს

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + V(r)$$

ასეთი ფორმით ჩაწერილ ჰამილტონიანში $V(r)$ არის ლორენცის 4-ვექტორის ნულოვანი კომპონენტა. ამაზე აქ ყურადღებას ვამახვილებთ იმიტომ, რომ ლიტერატურაში ხშირად განიხილება ხოლმე პოტენციალები სხვა ლორენც-სტრუქტურითაც. მაგალითად, სკალარული პოტენციალი, რაც შეესაბამება ურთიერთქმედების ჩართვას მასურ წევრში ანუ შეცვლას $V(r) \to \beta V(r)$. რაც შეეხება დირაკის K ოპერატორს, ის კომუტირებს ჰამილტონიანთან ამ შემთხვევაშიც. ამის გამო განტოლების სპექტრი მისთვისაც გადაგვარებულია K-ს საკუთარი მნიშვნელობების ორი ნიშნის მიხედვით, $\pm \kappa$ [37,41]. ამ გადაგვარების აღსაწერად გვჭირდება A ოპერატორი, რომელიც იკომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან და ამავდროულად იქნება K-კენტი, ე.ი. ოპერატორი თვისებებით:

$$[A, H] = 0, \qquad \{A, K\} = 0$$

ამის შემდეგ შეგვეძლება ავაგოთ სუპერმუხტები მისი მეშვეობით და განვავითაროთ ვიტენის სუპერალგებრა. როგორც უკვე ადრე დავადგინეთ, K-კენტი ოპერატორები შეგვიძლია ავაგოთ ჩვენი დამტკიცებული თეორემის გამოყენებით. ამავე დროს, ვიცით, რომ ასეთი ოპერატორების არჩევაში არსებობს საკმაო თავისუფლება $\hat{O}$ კომუტირებადი ოპერატორების სიზუსტით.

ამიტომ ჩვენ შევეცდებით ამოვიდეთ მინიმალური ჩართვის გზიდან და ვისარგებლოთ მხოლოდ ჩვენს ხელთ არსებული ფიზიკური ვექტორებით. ასეთებია:

$\hat{\vec{r}}$ - ერთეულოვანი რადიუს-ვექტორი და

$\vec{p}$ - იმპულსის ვექტორი.

ორივე მათგანი $\vec{l}$ -მომენტის ვექტორის პერპენდიკულარულია. როგორც უკვე ვიცით, თეორემის პირობებს აკმაყოფილებს კიდევ ერთი ვექტორი, სახელდობრ, ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი, $\vec{A} = \hat{\vec{r}} - \dfrac{i}{ma}\left[\vec{p}\times\vec{l} - \vec{l}\times\vec{p}\right]$, მაგრამ ეს ვექტორი ასოცირებულია კულონის პოტენციალთან, და რადგანაც ზოგად პოტენციალებს ვიხილავთ, ამ ეტაპზე თავს შევიკავებთ ამ ვექტორის გამოყენებისაგან. ამიტომ ჩვენ შემოვიფარგლებით შემდეგი კენტი ოპერატორების განხილვით;

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right) \qquad \text{და} \qquad K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right)$$

როგორც ქვემოთ გახდება ნათელი, მეორე სტრუქტურაში K ფაქტორის ჩართვა ნაკარნახევია პროცედურის თვითშეთანხმებულობის სურვილით.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ შერჩეული ორივე ოპერატორი არის დიაგონალური მატრიცა, მაშინ როცა დირაკის ჰამილტონიანი არადიაგონალურია და მასთან კომუტირების დროს არადიაგონალური მატრიცებიც გაჩნდება. ასე, მაგალითად,

$$\left[\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right), H\right] = \frac{2i}{r}\beta K\gamma_5$$

ამიტომ გამოვცადოთ შემდეგი კომბინაცია (რომელიც სტრუქტურულად ემთხვევა ადრე განხილულს)

$$A = x_1\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right) + ix_2 K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right) + ix_3 K\gamma_5 f(r)$$

აქაც x_i $(i = 1,2,3)$ კოეფიციენტები ისეა არჩეული, რომ A იყოს ერმიტული ოპერატორი, როცა x_i-ები ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $f(r)$ არის ნებისმიერი ნამდვილი ფუნქცია, რომელიც უნდა განისაზღვროს სიმეტრიის მოთხოვნიდან. ამ ოპერატორის კომუტატორი ჰამილტონიანთან ადვილი გამოსათვლელია და უდრის (იხ.დამატება II):

$$\begin{aligned}[A, H] = {} & x_1\frac{2i}{r}\beta K\gamma_5 + x_2 K\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right)V'(r) - \\ & - x_3 K\left(\vec{\Sigma}\hat{\vec{r}}\right)f'(r) - ix_3 2m\beta K\gamma_5 f(r)\end{aligned}$$

მოვითხოვოთ სიმეტრია – გავუტოლოთ ნულს ეს გამოსახულება:

$$K\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\left[x_2V'(r)-x_3f'(r)\right]+$$
$$+2i\beta K\gamma_5\left[\frac{x_1}{r}-x_3mf\left(r\right)\right]=0$$

აქ წევრები ისეა დალაგებული, რომ პირველ სტრიქონში გვაქვს დიაგონალური მატრიცა, ხოლო მეორეში – ანტიდიაგონალური. ამიტომ ტოლობის შესრულებისათვის ნულს უნდა გავუტოლოთ სათანადო კოეფიციენტები ცალკ-ცალკე. გვექნება

$$x_2V'(r)=x_3f'(r), \qquad x_3mf\left(r\right)=\frac{x_1}{r}$$

პირველი მათგანის ინტეგრაცია იმის მოთხოვნით, რომ აქ შემავალი ფუნქციები უსასრულობაში ეცემოდნენ, იძლევა ამონახსნს

$$x_2V(r)=x_3f\left(r\right),$$

მაშინ, როცა მეორე განტოლება გვაძლევს

$$f\left(r\right)=\frac{x_1}{x_3}\frac{1}{mr}$$

ამ შედეგის ჩასმა წინა განტოლებაში გვაძლევს შემდეგ პოტენციალს

$$V(r)=\frac{x_1}{x_2}\frac{1}{mr}$$

ამრიგად, **საკმაოდ ზოგად პირობებში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ:**

– ერთადერთი ცენტრალური პოტენციალი, რომლისთვისაც დირაკის ჰამილტონიანს შეიძლება ჰქონდეს დამატებითი სიმეტრია (ზემოაღნიშნული შინაარსით) არის კ უ ლ ო ნ უ რ ი პოტენციალი.

ამავე დროს საინტერესოა, რომ რაკი შემავალ კოეფიციენტებს შეიძლება ჰქონდეთ ნებისმიერი ნიშანი, სიმეტრია გვაქვს როგორც მიზიდვის, ასევე განზიდვის შემთხვევაში.

თუ ჩვენ ავიღებთ მიზიდვის კულონურ პოტენციალს ჩვეულებრივი ფორმით

$$V(r)=-\frac{a}{r}, \qquad \text{სადაც} \quad a=Ze^2\equiv Z\alpha,$$

გამომდინარეობს, რომ $x_2=-\frac{1}{ma}x_1$, მაშინ სიმეტრიის ოპერატორი იღებს სახეს

$$A=x_1\left\{\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right)-\frac{i}{ma}K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right)+\frac{i}{mr}K\gamma_5\right\}$$

რაც, ბუნებრივია, ემთხვევა ჩვენს მიერ ადრე მიღებულ ოპერატორს და დირაკის სათანადო მატრიცებზე გადასვლის შემდეგ გვრჩება ლიპმანისა და ჯონსონის ოპერატორი.

შევნიშნოთ, რომ თუ ავიღებდით ლორენც-სკალარულ პოტენციალს (რაც ნიშნავს $V \to \beta V$ შეცვლას), მაშინ დირაკის K ოპერატორი მართალია კვლავ იკომუტირებს ჰამილტონიანთან, მიღებული ოპერატორი A აღარ იქნება სიმეტრიის ოპერატორი თვით კულონის პოტენციალისათვისაც კი.

ამრიგად, ჩვენ დავრწმუნდით, რომ დამატებითი სიმეტრიის პრობლემაში კულონური პოტენციალი ასრულებს აშკარად **გამოყოფილ როლს** – მხოლოდ მისთვის გვაქვს ვიტენის სუპერალგებრა. ამავე დროს აღნიშვნის ღირსია ის ფაქტიც, რომ ზემოთ გამოყვანილი ლიპმან-ჯონსონის ოპერსტორი აღწერს დამატებით სიმეტრიას მხოლოდ ლორენც – ვექტორის მე-4 კომპონენტის შემთხვევაში ანუ როცა კულონური პოტენციალი ჩაირთვება ყალიბრულად კოვარიანტული ფორმით.

IV.2. სიმეტრიის ოპერატორის ფიზიკური შინაარსი

რა ფიზიკური სურათი დგას ყოველივე ამის უკან?

შევნიშნოთ, რომ თუ ჩვენი თეორემიდან გამომდინარე თანაფარდობას (III.5.3) გამოვიყენებთ იმ შემთხვევისათვის, როცა $\vec{V} = \vec{p}$, ჩვენი ოპერატორი შეგვიძლია გარდავქმნათ კულონური ამოცანისათვის კარგად ცნობილ ფორმაზე

$$A = \vec{\Sigma} \cdot \left(\hat{\vec{r}} - \frac{i}{2ma} \left[\vec{p} \times \vec{l} - \vec{l} \times \vec{p} \right] \right) + \frac{i}{mr} K \gamma_5$$

ვხედავთ, რომ არარელატივისტურ ზღვარში, როცა $\beta \to 1$ და $\gamma_5 \to 0$, ჩვენი ოპერატორი გადადის არარელატივისტურ ოპერატორში

$$A \;\to\; A_{NR} = \vec{\sigma} \cdot \left(\hat{\vec{r}} - \frac{i}{2ma} \left[\vec{p} \times \vec{l} - \vec{l} \times \vec{p} \right] \right) .$$

ფრჩხილებში მოთავსებულია ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი. ამრიგად, რელატივისტური სუპერმუხტის ოპერატორი დაიყვანება ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის პროექციაზე ელექტრონის სპინის მიმართულებაზე. სწორედ ეს ოპერატორი იყო გამოყენებული პაულის ელექტრონის შემთხვევაში [5].

ამრიგად, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორთან დაკავშირებული ფარული სიმეტრია მართავს ფიზიკური პროცესების საკმარისად ფართო არეალს ციური სხეულების მოძრაობიდან დაწყებული ატომებში სპექტრების ფაქიზ და ზაფაქიზ სტრუქტურამდე.

აღსანიშნავია, რომ კულონური პოტენციალისათვის დამახასიათებელი ფარული სიმეტრია, როგორც ზემო განხილვიდან ჩანს, დირაკის განტოლებაში თავს ავლენს საკმაოდ მოულოდნელად და ამავე დროს გამოთვლების მხოლოდ გვიანდელ (დასკვნით) ეტაპზე. ამდენად კიდევ უფრო ამართლებს მისთვის შერქმევა **"ფარული სიმეტრიის"** სახელისა.

გავიხსენოთ აგრეთვე, რომ მოძებნილი სიმეტრიის ოპერატორის ფორმა არ არის ერთადერთი. ჩვენი თეორემის ძალით ყოველთვის შეგვიძლია შევცვალოთ $A \to \hat{O}A$, სადაც $\left[\hat{O}, H\right] = 0$ და $\left[\hat{O}, K\right] = 0$, ანუ $\hat{O}$ კომუტირებდეს ორივე ოპერატორთან, H და K.შეგვიძლია ავიღოთ, მაგალითად, $\hat{O} = f(K)$, სადაც $f(K)$ არის K-ს ნებისმიერი რეგულარული ფუნქცია. გარდა ამისა, ჩვენ არ მიგვიქცევია ყურადღება მთელი რიგი ეგზოტიკური მოდელებისათვის დირაკის განტოლებაში (როგორიცაა, მაგალითად, დაბალი (2+1) განზომილებები [43], არამინიმალური ბმა ანომალურ მაგნიტურ მომენტთან [44], მონოპოლები [45], კვადრირებული განტოლებები [46] და ა.შ., თუმცა ამ უკანასკნელთ ნაწილობრივ მაინც განვიხილავთ შემდეგში.

IV.3. ზოგადი შენიშვნები დირაკის განტოლების სიმეტრიებისა და ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტიკის შესახებ – დირაკის განტოლება და დირაკის კვადრირებული განტოლება

როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, კლასიკურ მექანიკაში ბერტრანის თეორემით 2 პოტენციალია გამოყოფილი – კულონური და იზოტროპული ოსცილატორი, ორივე მათგანი გვაძლევს პერიოდულ მოძრაობებს ჩაკეტილ ორბიტებზე. კულონური პოტენციალისათვის შესაბამისი შენახვადი სიდიდეა ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი, რომელიც დეტალურად აღვწერეთ ჩვენს ნაშრომში რელატივისტური კვანტური მექანიკის ფარგლებში. რაც შეეხება ოსცილატორს – მისთვისაც არსებობენ კლასიკური მოძრაობის ინტეგრალები. კულონური პოტენციალისაგან განსხვავებით, კლასიკური და კვანტური მექანიკის

სახელმძღვანელოებში ოსცილატორული პოტენციალის მოძრაობის ინტეგრალები ნაკლებადაა აღწერილი. ისინი უფრო გვხვდება მონოგრაფიებსა [47] და სამეცნიერო ლიტერატურაში. ამასთან, რელატივისტური კვანტური მექანიკის შემთხვევაში კიდევ უფრო მწირი სიტუაციაა. ბუნებრივად ისმის კითხვა – **სად უნდა ვეძიოთ დამატებითი სიმეტრია ოსცილატორისათვის დირაკის განტოლების შემთხვევაში?**

ჰარმონიული ოსცილატორის პოტენციალია

$$V(r) = \frac{kr^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} \qquad \text{(IV.3.1)}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ შემდეგ მეორე რანგის ტენზორს

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}\left(p_i p_j + m^2\omega^2 r_i r_j\right) \qquad \text{(IV.3.2)}$$

აქვს ნულოვანი პუასონის ფრჩხილი $\left(A_{ij}, H\right) = 0$ ოსცილატორის ჰამილტონიანთან

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}. \qquad \text{(IV.3.3)}$$

რაკი A_{ij} სიმეტრიული ტენზორია, მას შეიძლება ჰქონდეს სულ მეტი 6 დამოუკიდებელი კომპონენტი. ადვილად მოწმდება, რომ

$$\left(l_i, A_{jk}\right) = \varepsilon_{ijm} A_{mk} + \varepsilon_{ikm} A_{mj} \qquad \text{(IV.3.4)}$$

და

$$\left\{A_{ij}, A_{mk}\right\} = \frac{\omega^2}{4}\left(\delta_{jm}\varepsilon_{ikn} l_n + \delta_{im}\varepsilon_{jkn} l_n + \delta_{jk}\varepsilon_{imn} l_n + \delta_{ik}\varepsilon_{jmn} l_n\right) \qquad \text{(IV.3.5)}$$

ე.ი. გვაქვს პუასონის ფრჩხილების ალგებრა. მომენტის ვექტორის კომპონენტები ამ სიმეტრიულ ტენზორთან ერთად ქმნიან რაღაც ფართო სიმეტრიას რაიმე 8-განზომილებიან სივრცეში და ეთანადებიან სპეციალურ უნიტარულ ჯგუფს $SU(3)$. ამ ტენზორის სტრუქტურიდან აშკარაა, რომ მისი კომპონენტები ძევს ორბიტის სიბრტყეში, რადგანაც ადგილი აქვს თანაფარდობას $A_{ij} l_j = 0$.

კვანტურ მექანიკაში ზემოაღნიშნული თანაფარდობები გადმოდის ავტომატურად ოპერატორებზე, რადგან თითოეული მათგანი სიმეტრიზებულია კოორდინატებისა და იმპულსების მიმართ და აქვთ ვეილის მოწესრიგებული ფორმა. ბუნებრივია, რომ ამ დროს პუასონის კლასიკური ფრჩხილები იცვლება

სათანადო კომუტატორებით და გვაქვს სპეციალური უნიტარული სიმეტრია $SU(3)$ კვანტური ოპერატორებისათვის.

გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ბევრ შემთხვევებში სუპერსიმეტრიის გამომჟღავნები - სათვის და საერთოდ, განტოლების ამოხსნისათვის გამოიყენება დირაკის განტო-ლების **კვადრირება** - უფრო ზუსტად, მისი მიყვანა მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე, რომელიც შეისწავლება კარგად ცნობილი სტანდარტული მეთოდებით.

ამ პარაგრაფში ყურადღება გვინდა მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ დირაკის განტოლების კვადრირებისას აუცილებებლია დავიცვათ გარკვეული სიფრთხილე. მხედველობაში გვაქვს შემდეგი: დირაკის განტოლების მიყვანა მეორე რიგის განტოლებაზე ხდება სხვადასხვა მეთოდებით. ერთ-ერთი მათგანია თვით განტოლებაზე ჩატარებული მანიპულაციები, მაგალითად, ტალღური ფუნქციის კომპონენტების გამოხატვა დანარჩენი კომპონენტებით და ამ უკანასკნელთათვის განტოლების მიღება, რომელიც იქნება მე-2 რიგისა [48]. სხვა მეთოდები იყენებენ ჰამილტონიანის კვადრატში აყვანას [49] ან გამრავლებას “შეუღლებულ” ოპერატორზე [50]. ყოველ ასეთ შემთხვევაში დაისმება კითხვა – ხომ არ შევიძინეთ ზედმეტი ამონახსნები? ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ ტიპიურ მაგალითებს, რომელთა სისტემაში მოყვანით შესაძლებელია გარკვეული სიცხადის შეტანა.

განხილული იქნება დირაკის ჰამილტონიანის სხვადასხვა მოდელები და შესწავლილ იქნება განტოლების ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დიდ მანძილებზე ორი მეთოდით: ა) დირაკის განტოლებით და ბ) მისი კვადრირებით. ვნახავთ, რომ ზოგიერთი შემთხვევა არატრივიალურია.

მაგალითი 1. [48]

განვიხილოთ შემდეგი ჰამილტონიანი

$$H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m + V(r) = H_D + V(r), \tag{IV.3.6}$$

სადაც $H_D = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m$ არის დირაკის თავისუფალი ჰამილტონიანი. ასეთი განხილვისას, როგორც ვიცით, $V(r)$ არის ლორენცის 4-ვექტორის ნულოვანი კომპონენტა და შეესაბამება რელატივისტურ ლაგრანჟიანში ურთიერთქმედების ყალიბრულად ინვარიანტულ ჩართვას. ასეთი ჰამილტონიანი კომუტირებს დირაკის K-ოპერატორთან ნებისმიერი ცენტრალური პოტენციალისათვის.

ამოვხსნათ (IV.3.6) ჰამილტონიანისათვის დირაკის სტაციონარული განტოლება $H\Psi = E\Psi$ სტანდარტული მეთოდით. წარმოვადგინოთ

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.3.7)}$$

და მიღებულ განტოლებაში გამოვრიცხოთ ქვედა კომპონენტი თანაფარდობით

$$\chi = \frac{1}{E+m-V}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\varphi \qquad \text{(IV.3.8)}$$

მაშინ ზედა კომპონენტისათვის მიიღება განტოლება [48]

$$\left[\vec{p}^{\,2} - (E-V)^2 + m^2\right]\varphi - i\frac{V'(r)}{E+m-V}\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\varphi = 0, \qquad \hat{\vec{r}} \equiv \frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{(IV.9)}$$

აშკარაა, რომ თუ $V(r)$ არის მანძილის მიხედვით ზრდადი პოტენციალი

$$\lim_{r\to\infty} V(r) = \infty, \qquad \text{(IV.3.10)}$$

მაშინ (IV.3.9) განტოლებაში წამყვანი ასიმპტოტური ყოფაქცევა იქნება

$$\left(p^2 - V^2\right)\varphi \approx 0, \qquad \text{(IV.3.11)}$$

ანუ კოორდინატულ სივრცეში მივალთ შემდეგ ასიმპტოტურ რადიალურ განტოლებაზე

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + V^2(r)\right)\varphi(r) = 0 \qquad \text{(IV.3.12)}$$

რაკი $V(r)$ ზრდადია, მაგ., ოსცილატორი ან წრფივი პოტენციალია, ამ განტოლებას არ აქვს ასიმპტოტურად დაცემადი (ნორმირებადი) ამოხსნები, ანუ განტოლება არ იძლევა ბმულ მდგომარეობებს (კლაინის პარადოქსი [50]). ამრიგად, ასეთი განხილვისას ოსცილატორის ადგილი არ გვრჩება.

ახლა განვიხილოთ ამოხსნა დირაკის განტოლების კვადრირებით, $H^2\Psi = E^2\Psi$. გამოთვლა იძლევა განტოლებას

$$\left(\vec{p}^{\,2} + m^2 + V^2 + 2\beta mV + 2V(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) - i(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}})V'(r)\right)\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E^2\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.3.13)}$$

ამ განტოლების ასიმპტოტური სახე იმავე კლასის (ზრდადი) პოტენციალებისათვის იქნება

$$\left((\vec{p}^{\,2} + V^2)\right)\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \approx 0$$

(IV.3.11)-თან შედარებით გვაქვს საწინააღმდეგო ნიშანი, ამიტომ რადიალური ასიმპტოტური განტოლების სახეა

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-V^2(r)\right)\varphi(r)\approx 0$$

ამ განტოლებას აქვს ნორმირებადი ამონახსნი დაცემადი ასიმპტოტიკით, ე.ი. გვაქვს ბმული მდგომარეობების სათანადო ამონახსნები. ამრიგად **კვადრირებამ შეცვალა განტოლების ბუნება.** ასეთი კვადრირება მიზანშეწონილია იმით, რომ შენარჩუნდება ის სიმეტრიები, რაც ჰქონდა თავდაპირველ დირაკის განტოლებას. მაგრამ, სამაგიეროდ, ჩნდება დამატებითი ამონახსნები, რომლებიც თავდაპირველ დირაკის განტოლებას არ ჰქონია.

ამიტომ ნათელია, რომ დირაკის განტოლებასთან მოპყრობის დროს უნდა გამოვიჩინოთ გარკვეული სიფრთხილე, როცა საქმე გვაქვს უსასრულოდ ზრდად პოტენციალებთან.

კლასიკურ მექანიკაში უსასრულოდ ზრდადი პოტენციალი – იზოტროპული ოსცილატორი იძლევა მოძრაობას ჩაკეტილ პერიოდულ ორბიტებზე. დირაკის განტოლება კი საერთოდ არ იძლევა ბმულ მდგომარეობებს ასეთი პოტენციალებისათვის. ამიტომ კლასიკურ მაგალითს დირაკის განტოლებაში ანალოგი არ აქვს განსხვავებით კულონური პოტენციალისაგან. ამ ორ პოტენციალს დირაკის განტოლებისათვის სხვადასხვა დატვირთვა აქვს.

მაგალითი 2 [49,51].

განვიხილოთ ახლა დირაკის ჰამილტონიანი ვექტორული პოტენციალებით

$$H=\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{p}-\hat{\vec{A}}\right)+\beta m=H_D-\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{A}} \qquad \text{(IV.3.14)}$$

აქ $\hat{\vec{A}}$ საზოგადოდ ვექტორთან ერთად შეიძლება დირაკის რომელიმე მატრიცასაც შეიცავდეს.

ა) ვთქვათ, $\hat{\vec{A}}=B[\vec{n}\times\vec{r}]$ – ესაა ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის ვექტორული პოტენციალი, $\vec{n}$ არის $\vec{r}$ და $\vec{p}$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის ნორმალური ერთეულოვანი ვექტორი.

დირაკის განტოლებაზე ზემოთ აღწერილი მანიპულაციების ჩატარებით ტალღური ფუნქციის ზედა კომპონენტისათვის მიიღება პაულის ტიპის განტოლება:

$$\left(m^2 - E^2\right)\varphi - \left(\vec{p}^{\,2} + \vec{A}^2 + i\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - 2\vec{A}\cdot\vec{p}\right)\varphi - \vec{\sigma}\cdot\vec{B}\varphi - 2iB\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right)\varphi = 0 \qquad \text{(IV.3.15)}$$

ცხადია, $\left|\vec{A}\right|$ რომ იყოს უსასრულოდ ზრდადი, მაგ., $\left|\vec{A}\right| = Br$, როგორც ჩვენს შემთხვევაშია, მაშინ $\vec{A}^2$ იქნებოდა დომინირებადი წევრი და ამოცანა მიიყვანებოდა ოსცილატორის ასიმპტოტიკაზე

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - B^2 r^2\right)\varphi(r) \approx 0$$

ანუ დირაკის განტოლებას ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში აქვს ამოხსნები ბმული მდგომარეობებით, რაც აღწერილია ნებისმიერ სახელმძღვანელოში.

თუ კვადრირებულ განტოლებას შევისწავლით, აგრეთვე მიიღება სწორი ასიმპტოტიკური ყოფაქცევა.

ამრიგად, ამ მაგალითში კვადრირებული და თვით დირაკის განტოლების ასიმპტოტიკები ერთმანეთს ემთხვევა.

ბ) ვთქვათ, ახლა $\hat{\vec{A}} = im\omega\beta\vec{r}$. ესაა ე.წ. "**დირაკის ოსცილატორი**" [49]. ამ შემთხვევაში დირაკის განტოლება ზედა კომპონენტისათვის შემდეგი სახისაა

$$\left(\vec{p}^{\,2} + m^2\omega^2 r^2\right)\varphi - \left(2\vec{\Sigma}\cdot\vec{l} + 3\right)m\omega\varphi = \left(E^2 - m^2\right)\varphi \qquad \text{(IV.3.16)}$$

და განტოლებას აქვს ბმული მდგომარეობების შემცველი ასიმპტოტიკა.

საინტერესოა, რომ ამ მაგალითში კვადრირებითაც იგივე განტოლება მიიღება.

როგორც ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში, ასევე დირაკის ოსცილატორის მაგალითში მიღებულ მე-2 რიგის რადიალურ დიფერენციალურ განტოლებებს აქვთ ცხადი სახის ამოხსნები და მათთვის გამოიყვანება ე.წ. **რადიალური სუპერსიმეტრია.** მაგრამ სამგანზომილებიანი ფორმით ფარული სიმეტრიის საკითხები ჯერ კიდევ კვლევის საგანს წარმოადგენს. განსაკუთრებით ეს ეხება ბოლო მაგალითს, დირაკის ოსცილატორს. ეს მაგალითი იმითაც არის საინტერესო, რომ მისი ჰამილტონიანი კვლავ კომუტირებს დირაკის K ოპერატორთან, ხოლო ჩვენს მიერ თეორემაში დამტკიცებული ზოგადი

სტრუქტურები ანტიკომუტირებენ ამ უკანასკნელთან, და ადვილი შესაძლებელია, რომ მეთოდმა ჰპოვოს გამოყენება ამ მოდელშიც.

IV.4 ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორის განზოგადება სკალარული პოტენციალის შემთხვევაში

ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ყალიბრულად ინვარიანტული მინიმალური გზით ჩართული ცენტრალური პოტენციალებიდან მხოლოდ კულონური პოტენციალი ასრულებს გამოყოფილ როლს. ამავე დროს აღმოვაჩინეთ, რომ თუმცა სკალარული პოტენციალის ჩართვისას მიღებული ჰამილტონიანი კვლავ კომუტირებს დირაკის K-ოპერატორთან, იგი აღარ იკომუტირებს ზემოთ მიღებულ ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორთან.

მეორეს მხრივ, არარელატივისტური კვანტური მექანიკა (შრედინგერის განტოლება) ინდეფერენტულია პოტენციალის ლორენც-ვარიანტობის მიმართ: მისთვის ლორენც-ვექტორის მე-4 კომპონენტი (რაც 3-განზომილებიან სივრცეში სკალარია ბრუნვების მიმართ) და წმინდა ლორენც-სკალარი ერთმანეთისაგან განურჩეველია – დირაკის განტოლებიდან არარელატივისტურ ზღვარზე გადასვლისას ორივე შემთხვევაში მიიღება ერთიდაიგივე შრედინგერის განტოლება, რომელსაც გააჩნია ზემოხსენებული დამატებითი სიმეტრია.

ამიტომ უნდა ვივარაუდოთ, რომ სკალარული პოტენციალის თანდასწრებითაც დირაკის განტოლებას კვლავ უნდა გააჩნდეს დამატებითი სიმეტრია, ოღონდ ამ შემთხვევაში ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორს ექნება სხვა სახე.

ასე, რომ განვიხილოთ უზოგადესი ამოცანა სკალარული პოტენციალის ჩართვით, როცა დირაკის ჰამილტონიანს აქვს შემდეგი სახე:

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + V(r) + \beta S(r) \qquad \text{(IV.4.1)}$$

აქ $S(r)$ არის ლორენც-სკალარული პოტენციალი. ეს ჰამილტონიანი კომუტირებს K-ოპერატორთან, მაგრამ ***არ კომუტირებს*** ზემოთმოყვანილ ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორთან.

ახალი შენახვადი ოპერატორის მისაღებად საჭირო გახდება მასში ჩავრთოთ ახალი სტრუქტურები, რის საშუალებასაც იძლევა ჩვენი თეორემა დამატებითი $\hat{O}$ ფაქტორების ნაწილში.

გამოვცადოთ, მაგალითად, შემდეგი სახის ოპერატორი

$$\mathrm{X} = x_1\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right) + x_1'\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right)H + ix_2K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right) + ix_3K\gamma_5 f_1(r) + ix_3'K\gamma_5\beta f_2(r) \qquad \text{(IV.4.2)}$$

როგორც ვხედავთ, პირველ სტრუქტურაში ჩავუმატეთ $\hat{O}=H$ ფაქტორი, და ამავე დროს მე-3 სტრუქტურაში – $\hat{O}=\beta$ მატრიცა. ეს არის ზემოთ განხილული ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორის მინიმალური განზოგადება იმ შინაარსით, რომ $\hat{\vec{r}}$ და $\vec{p}$ ვექტორების მიმართ მხოლოდ პირველი რიგის სტრუქტურები მონაწილეობენ. ძველ შემთხვევაზე დასაბრუნებლად უნდა დავუშვათ $x_1' = x_3' = 0$ და $S(r)=0$. ამ სახის ოპერატორის შესაბამისი კომუტატორების გამოთვლა გვაძლევს შედეგს:

$$\begin{aligned}
[B,H] = {} & \gamma^5\beta K\left\{\frac{2ix_1}{r} - 2ix_3(m+S)f_1(r) + \frac{2ix_1'}{r}V(r)\right\} + \\
& + K\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\left\{x_2V'(r) - x_3f_1'(r)\right\} + \\
& + K\beta\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\left\{x_2S'(r) - x_3'f_2'(r)\right\} + \\
& + \gamma^5K\left\{\frac{2ix_1'(m+S)}{r} - 2ix_3'(m+S)f_2(r)\right\} + \\
& + \beta K\left\{\frac{2ix_1'}{r} - 2ix_3'f_2(r)\right\}\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right)
\end{aligned} \qquad \textbf{(IV.4.3)}$$

თუ მოვითხოვთ სიმეტრიას და ამ გამოსახულებას ნულს გავუტოლებთ, კვლავ მივიღებთ მატრიცულ განტოლებას, რომელშიც 2×2 წარმოდგენაზე გადასვლის შემდეგ ამ თანაფარდობის მარჯვენა მხარეში ცხადი სახით გამოიყოფა დიაგონალური და ანტიდიაგონალური ელემენტები. ისინი ცალკ-ცალკე უნდა გავუტოლოთ ნულს, რაც მოგვცემს განტოლებებს:

(1) ანტიდიაანგონალური სტრუქტურებიდან $\left(\gamma^5K,\ \ \gamma^5\beta K\right)$**:**

$$\begin{aligned}
& \frac{x_1}{r} - x_3(m+S)f_1(r) + \frac{x_1'}{r}V(r) = 0 \\
& \frac{x_1'}{r}(m+S) - (m+S)f_2(r) = 0
\end{aligned} \qquad \textbf{(IV.4.4)}$$

(2) დიაგონალური სტრუქტურებიდან ($K\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right),\ \ K\beta\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right),\ \ \beta K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right)$**):**

$$
\begin{aligned}
&x_2 V'(r) - x_3 f_1'(r) = 0\\
&\frac{x_1}{r} - x_2(m+S)V(r) + \frac{x_1'}{r}V(r) = 0\\
&x_2 S'(r) - x_3' f_2'(r) = 0\\
&\frac{x_1'}{r} - x_3' f_2(r) = 0
\end{aligned}
\qquad \text{(IV.4.5)}
$$

ამ უკანასკნელში პირველი და მესამე განტოლებების ინტეგრაციით უსასრულობაში ნულოვანი სასაზღვრო პირობების მოთხოვნისას ვღებულობთ:

$$f_1(r) = \frac{x_2}{x_3}V(r), \qquad f_2(r) = \frac{x_2}{x_3'}S(r) \qquad \text{(IV.4.6)}$$

ხოლო (IV.4.5)-ის ბოლო განტოლების გათვალისწინებით გვაქვს

$$f_2(r) = \frac{x_1'}{x_3' r} \qquad \text{(IV.4.7)}$$

ამიტომ (IV.4.6)-ის თანახმად საბოლოოდ ვპოულობთ

$$S(r) = \frac{x_1'}{x_2 r} \qquad \text{(IV.4.8)}$$

ამრიგად, **სკალარული პოტენციალი უნდა იყოს კულონური.**

ჩავსვათ ახლა (IV.4.6) შედეგი (IV.4.4)-ის პირველ განტოლებაში და ამოვხსნათ $V(r)$ - ისათვის:

$$V(r) = \frac{x_1}{r}\frac{1}{x_2(m+S) - \frac{x_1'}{r}},$$

ერთი შეხედვით შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ვექტორული პოტენციალისათვის წარმოიქმნა გადახრა კულონურიდან, მაგრამ თუ აქ (IV.4.8)-ს გავითვალისწინებთ, მიიღება

$$V(r) = \frac{x_1}{x_2 m r} \qquad \text{(IV.4.9)}$$

ამრიგად, დავადგინეთ, რომ $\pm\kappa$ გადაგვარება არის დირაკის განტოლების სიმეტრია მარტოდმარტო კულონური პოტენციალისათვის (ლორენც-სკალარისა და ლორენც-ვექტორის მე-4 კომპონენტის ნებისმიერი უზოგადესი კომბინაციისათვის).

ამ ფაქტიდან გამომდინარე ვამტკიცებთ, რომ **კეპლერის პრობლემის შემთხვევითი ანუ ფარული სიმეტრიის ბუნება ამოხსნილია – ესაა $\pm\kappa$ გადაგვარება. ამ სიმეტრიის გენერატორები A ან X აღწერენ ამ გადაგვარებას – ადგილებს უცვლიან ამ ორ მნიშვნელობას.**

ახლა შეგვიძლია უფრო ნათლად დავინახოთ აღნიშნული სიმეტრიის კავშირი ლემბის წანაცვლების აკრძალვასთან. მართლაც, მომენტების შეკრების ჩვეულებრივი ალგებრიდან ადვილად დავადგენთ, რომ $\kappa = j + 1/2$ მნიშვნელობა გვაქვს თანამიმართული სპინისათვის: $j = l + 1/2$, ანუ მდგომარეობებისათვის

$$(s_{1/2}, p_{3/2}, \ldots\ldots..)$$

მაშინ, როცა უარყოფითი მნიშვნელობა $\kappa = -(j + 1/2)$ შეესაბამება საწინააღმდეგოდ მოგეზულ სპინს: $j = l - 1/2$ ანუ მდგომარეობებს:

$$(p_{1/2}, d_{3/2}, \ldots\ldots..)$$

სხვა სიტყვებით, $\kappa \to -\kappa$ გადაგვარება ნიშნავს სწორედ გადაგვარებას დონეებისა

$$s_{1/2} \to p_{1/2}, \qquad p_{3/2} \to d_{3/2}$$

ანუ, რომ გვქონოდა ეს სიმეტრია **ლემბის წანაცვლება მკაცრად იქნებოდა აკრძალული.** ამრიგად, დირაკის განტოლებაში ლემბის წანაცვლების არ არსებობა წარმოადგენს $\kappa \to -\kappa$ სიმეტრიის შედეგს, რაც თავის მხრივ სიღრმისეულად უკავშირდება ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის შენახვას. როგორც ვრწმუნდებით, ეს ფაქტი უფრო ნათლად გამოჩნდა რელატივისტური განხილვისას.

მას შემდეგ, რაც რელატივისტურ (დირაკის) განტოლებაში დამატებითი სიმეტრია ნაპოვნია, შეგვიძლია ავაგოთ $SO(4)$ ალგებრა, რომლის გამოვლინებას მაკროსამყაროში წარმოადგენს ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის შენახვა და, შესაბამისად ციური ორბიტების ჩაკეტილობა. სხვა სიტყვებით, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ **ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის შენახვა არის მიკროსამყაროში არსებული სიმეტრიის მაკროსკოპული გამოვლინება.**

ზემოთ მიღებულ სიმეტრიის ოპერატორს მოყვანილი ამოხსნების გათვალისწინებით შეგვიძლია მივცეთ უფრო კომპაქტური სახე[52]:

$$\mathrm{X} = \left(\vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{r}}\right)\left(m a_V + H a_S\right) - iK\gamma_5\left(H - \beta m\right) \qquad \text{(IV.4.10)}$$

სადაც გამოყენებული გვაქვს შემდეგი აღნიშვნები:

$$a_V = -\frac{x_1}{x_2 m}, \qquad a_S = -\frac{x_1'}{x_2}$$

ხოლო $a_{V,S}$ არიან კულონური ურთიერთქმედების კონსტანტები

$$V(r) = -\frac{a_V}{r}, \qquad S(r) = -\frac{a_S}{r}, \qquad a_{V,S} > 0$$

აღვნიშნოთ, რომ სამეცნიერო ლიტერატურაში სულ ახლახან გაჩნდა X ოპერატორის შესატყვისი [53], რომლის სახის მისახვედრად გამოყენებულია დირაკის განტოლების რადიალური გაშლა და სფერული კუთხეების განცალება.

ჩვენი მიდგომა არის **3-განზომილებიანი,** რომელიც საერთოდ არ იყენებს დირაკის განტოლებას (მითუმეტეს, მის რადიალურ სახეს), ეყრდნობა მხოლოდ წინა თავში დამტკიცებულ თეორემას, ამასთან იგი გაცილებით იოლია და გამჭვირვალე, განსაკუთრებით სიმეტრიების თვალსაზრისით.

ამავდროულად კიდევ ერთხელ მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ ჩვენი ანალიზი საფუძველს გვაძლევს თამამად ვამტკიცოთ, რომ **კეპლერის პრობლემის "ფარული" სიმეტრიის მისტიკური ბუნება ამოხსნილია – ეს ყოფილა გარკვეული გადაგვარება კვანტურ (რელატივისტურ) დონეზე.**

IV.5 დირაკის განტოლების სპექტრის მიღება ლორენც-სკალარული და ლორენც-ვექტორული პოტენციალების ნებისმიერი კომბინაციისათვის წმინდა ალგებრული განხილვით

ჩვენს მიერ ზემოთ აგებული ზოგადი სიმეტრიის ოპერატორი შეიძლება გამოვიყენოთ კეპლერის ამოცანის სპექტრის მისაღებად დირაკის ჰამილტონიანისათვის, ისე რომ არ მივმართოთ განტოლების ამოხსნის პროცედურას. ამისათვის გამოვიყენებთ ვიტენის სუპერალგებრის მეთოდს, რომელიც უკვე აღვწერეთ წინა პარაგრაფებში. საქმე იმაშია, რომ როგორც კი ავაგებთ დირაკის K ოპერატორთან ანტიკომუტირებად ოპერატორს, მაშინვე წარმოგვექმნება $S(2)$ სუპერსიმეტრიის თანაფარდობები. ჩვენს შემთხვევაში საკმარისია მოვახდინოთ შემდეგი იდენტიფიკაცია

$$Q_1 = \mathrm{X}, \qquad\qquad Q_2 = i\frac{\mathrm{X}K}{|\kappa|}$$

მაშინ

$$\{Q_1, Q_2\} = 0, \qquad\qquad Q_1^2 = Q_2^2 \equiv h$$

გამოდის, რომ გვაქვს ვიტენის ალგებრა, სადაც h ასრულებს სუპერსიმეტრიული ჰამილტონიანის როლს.

ახლა ამ ალგებრას გამოვიყენებთ ადრე განხილული ამოცანის მსგავსად. პირველ რიგში უნდა განვსაზღვროთ სუპერსიმეტრიის ძირითადი მდგომარეობა ანუ ვაკუუმი ასე

$$h|0\rangle = \mathrm{X}^2|0\rangle = 0 \qquad \text{(IV.5.1)}$$

რადგან ვიტენის ჰამილტონიანი არის ერმიტული ოპერატორის კვადრატი, ამიტომ ნათელია, რომ მისი სპექტრი არის დადებითად განსაზღვრული. ამიტომ ჩვენ სრული უფლება გვაქვს თვით ეს ოპერატორი ჩავთვალოთ ნულის ტოლად ვაკუუმურ მდგომარეობაში,

$$\mathrm{X}|0\rangle = 0 \qquad \text{(IV.5.2)}$$

განვიხილოთ (IV.4.10) თანაფარდობა ძირითად მდგომარეობაში, გავუტოლოთ ნულს ოპერატორი და ამოვხსნათ ამ თანაფარდობიდან ჰამილტონიანი. მიიღება

$$H = m\left[\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)a_S + iK\right]^{-1}\left[iK\beta - a_V\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\right] = \frac{m}{K^2 + a_S^2}N \qquad \text{(IV.5.3)}$$

სადაც

$$\begin{aligned} N \equiv & \left[\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)a_S - iK\right]\left[iK\beta - a_V\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\right] = \\ & = -a_S a_V + K\left[K\beta + ia_V\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\right] - ia_S K\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right) \end{aligned} \qquad \text{(IV.5.4)}$$

ახლა შევეცადოთ მოვახდინოთ ამ ჰამილტონიანის დიაგონალიზაცია ფოლდი-ვაუტჰაუზენის სახის გარდაქმნების გამოყენებით[54]. რადგან ბოლო გამოსახულებაში მეორე და მესამე წევრები ერთმანეთთან არ კომუტირებენ, დაგვჭირდება რამდენიმე (სულ მცირე, ორი) ასეთი გარდაქმნის ჩატარება.

ავირჩიოთ პირველი გარდაქმნა შემდეგი სახით

$$\exp(iS_1) = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)w_1\right) \qquad \text{(IV.5.5)}$$

ნათელია, რომ

$$\begin{aligned} &\exp(iS_1)\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\exp(-iS_1) = \exp(2iS_1)\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right) \\ &\exp(iS_1)\beta\exp(-iS_1) = \exp(2iS_1)\beta \end{aligned} \qquad \text{(IV.5.6)}$$

ამასთან

$$\exp(iS_1)K\exp(-iS_1) = K, \qquad \exp(iS_1)\beta K\exp(-iS_1) = \exp(2iS_1)\beta K \qquad \text{(IV.5.7)}$$

და $$\exp(iS_1)\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\exp(-iS_1) = \beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right) \qquad \text{(IV.5.8)}$$

ამიტომ პირველი გარდაქმნა მოქმედებს ასე

$$N' \equiv \exp(iS_1)N\exp(-iS_1) = -a_S a_V + K\exp(2iS_1)\left[K\beta + ia_V\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\right] - ia_S K\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right) \quad \text{(IV.5.9)}$$

მაგრამ $\exp(2iS_1) = chw_1 + i\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)shw_1$

ამ თანაფარდობის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned}&\exp(2iS_1)\left[K\beta + ia_V\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\right] = \\ &= \beta\left[Kchw_1 + a_V shw_1\right] + K\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\left[ia_V chw_1 + iKshw_1\right]\end{aligned} \quad \text{(IV.5.10)}$$

ახლა თავიდან რომ ავიცილოთ $\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)$ არადიაგონალური წევრები, უნდა მოვახდინოთ ასეთი შერჩევა

$$thw_1 = -\frac{a_V}{K} \quad \text{(IV.5.11)}$$

მარტივი ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით ვღებულობთ

$$\exp(2iS_1)\left[K\beta + ia_V\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\right] = K^{-1}\beta\sqrt{K^2 - a_V^2} \quad \text{(IV.5.12)}$$

ამიტომ

$$N' = -a_S a_V + \beta\sqrt{K^2 - a_V^2} - ia_S K\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right) \quad \text{(IV.5.13)}$$

ახლა ჩავატაროთ მეორე გარდაქმნა

$$N'' = \exp(iS_2)N'\exp(-iS_2), \qquad \text{სადაც} \quad S_2 = -\frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)w_2 \quad \text{(IV.5.14)}$$

მაშინ გამოვიყვანთ შემდეგ თანაფარდობებს

$$\begin{aligned}&\exp(iS_2)K\beta\exp(-iS_2) = \exp(2iS_2)K\beta \\ &\exp(iS_2)K\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\exp(-iS_2) = \exp(2iS_2)K\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right) \\ &\exp(2iS_2) = \cos w_2 - i\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\sin w_2\end{aligned} \quad \text{(IV.5.15)}$$

ამიტომ

$$\begin{aligned}N'' &= -a_S a_V + K\sqrt{K^2 - a_V^2}\exp(2iS_2)\beta - ia_S\exp(2iS_2)K\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right) = \\ &= -a_S a_V + K\sqrt{K^2 - a_V^2}\,\beta\cos w_2 + iK\sqrt{K^2 - a_V^2}\,\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\sin w_2 - \\ &\quad - ia_S K\beta\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)\cos w_2 + a_S K\beta\sin w_2\end{aligned} \quad \text{(IV.5.16)}$$

მოვითხოვოთ კვლავ $\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}\right)$ წევრების გაქრობა. მიიღება პირობა

$$tgw_2 = \frac{a_S}{\sqrt{K^2 - a_V^2}} \quad \text{(IV.5.17)}$$

ამიტომ

$$N'' = -a_S a_V + K\beta\sqrt{K^2 - a_V^2 + a_S^2} \quad \text{(IV.5.18)}$$

და საბოლოოდ

$$H = \frac{m}{K^2 + a_S^2}\left\{- a_S a_V + K\sqrt{K^2 - a_V^2 + a_S^2}\,\beta\right\} \qquad \text{(IV.5.19)}$$

საკუთარი მნიშვნელობებისათვის ძირითად მდგომარეობაში აქედან გვაქვს

$$E_0 = \frac{m}{\kappa^2 + a_S^2}\left\{- a_S a_V \pm \kappa\sqrt{\kappa^2 - a_V^2 + a_S^2}\right\} \qquad \text{(IV.5.20)}$$

ახლა გავიხსენოთ დირაკის განტოლების ცხადი ამოხსნით მიღებული შედეგი [55]

$$E = m\left\{\frac{-a_S a_V}{a_V^2 + (n - |k| + \gamma)^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_S a_V}{a_V^2 + (n - |\kappa| + \gamma)^2}\right)^2 + \frac{(n - |\kappa| + \gamma)^2 - a_S^2}{a_V^2 + (n - |\kappa| + \gamma)^2}}\right\} \qquad \text{(IV.5.21)}$$

ამ ფორმულაში

$$\gamma^2 = \kappa^2 - a_V^2 + a_S^2 \qquad \text{(IV.5.22)}$$

ძირითადი მდგომარეობისათვის $n = 1, \quad j = 1/2 \quad \to \quad |\kappa| = j + 1/2 = 1$, დაგვრჩება

$$E_0 = m\left\{\frac{-a_S a_V}{a_V^2 + \gamma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_S a_V}{a_V^2 + \gamma^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2 - a_S^2}{a_V^2 + \gamma^2}}\right\} \qquad \text{(IV.5.23)}$$

ეს გამოსახულება ცხადი ალგებრული მანიპულაციების შემდეგ ადვილად მიიყვანება ჩვენს შედეგზე (30). ამრიგად, მხოლოდ ალგებრულ მეთოდებზე დაყრდნობით ჩვენ მივიღეთ ძირითადი მდგომარეობის ენერგიისათვის კორექტული გამოსახულება.

სრული სპექტრის მისაღებად საკმარისია დავეყრდნოთ ვიტენის ალგებრულ მეთოდს, რომელიც ცნობილია საფეხურებრივი (ან კიბური) მეთოდის სახელწოდებით და ჩვენი შემთხვევისათვის დაიყვანება შემდეგ შეცვლაზე:

$\gamma \quad \to \quad \gamma + n - |\kappa|$

თუ ასე მოვიქცევით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ჩვენი ფორმულიდან უმდაბლესი მდგომარეობებისათვის (30) გამომდინარეობს სწორი გამოსახულება ენერგიის მთელი სპექტრისათვის (31).

ამრიგად, სპექტრი მივიღეთ წმინდა ალგებრული მეთოდებით მხოლოდ სიმეტრიიდან გამომდინარე თანაფარდობებზე დაყრდნობით. ეს ფაქტი კიდევ

ერთხელ გვარწმუნებს იმაში, თუ რამდენად მძლავრია სიმეტრიის მეთოდების გამოყენება იქ, სადაც კი ეს შესაძლებელია.

დასკვნები

წინამდებარე სადისერტაციო ნაშრომში განვიხილეთ კულონურ ველში მოძრავი ნაწილაკისათვის დამატებით (ე.წ. "ფარულ") სიმეტრიასთან დაკავშირებული პრობლემები. თანმიმდევრულად ვაჩვენეთ, თუ რა მოვლენებთან გვაქვს საქმე კლასიკურ და არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში.

ნაშრომის ორიგინალურ ნაწილს წარმოადგენს მე-3 და მე-4 თავები, სადაც განიხილება დამატებითი შენახვის კანონი – ინახება (ფსევდო)სკალარული სიდიდე – ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორი, რომელიც არარელატივისტურ ზღვარში გადადის რუნგე-ლენცის ვექტორის გეგმილში სპინის მიმართულებაზე.

ნაშრომის ძირითადი ორიგინალური შედეგები, რომლებიც გამოტანილია დასაცავად, შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

განვითარებულია დამატებითი სიმეტრიის თეორია რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში. სახელდობრ:

ა) განზოგადებულია თეორემა დირაკის K ოპერატორთან ანტიკომუტირებადი ოპერატორების კლასის შესახებ.

ბ) ამ თეორემის საფუძველზე კულონური პოტენციალის შემთხვევაში აგებულია დირაკის ჰამილტონიანთან კომუტირებადი ოპერატორი, რომელიც აღწერს დირაკის განტოლების ე.წ. ფარულ სიმეტრიას. ნაჩვენებია, რომ ეს ოპერატორი ემთხვევა სამეცნიერო ლიტერატურაში ცნობილ ჯონსონისა და ლიპმანის ოპერატორს. ამ ოპერატორის გამოყვანა პირველად არის გამოქვეყნებული ავტორის მიერ.

გ) ნაჩვენებია, რომ ეს ოპერატორი და მასთან დაკავშირებული სიმეტრია წარმოადგენს კლასიკურ მექანიკაში ცნობილ ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის სიმეტრიის განზოგადებას რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაზე. ამავე დროს ეს სიმეტრია აკონტროლებს ლემბის წანაცვლებას წყალბადის ატომის სპექტრში.

დ) თეორია მიყენებულია დირაკის ჰამილტონიანისათვის ნებისმიერი ცენტრალური სიმეტრიის შემთხვევაში და დამტკიცებულია, რომ დამატებით სიმეტრიას ადგილი აქვს მხოლოდ კულონური პოტენციალისათვის.

ე) გარკვეულია ცალსახად, რომ კულონური ამოცანის ფარული სიმეტრია არის N=2 სუპერსიმეტრია.

ვ) გარკვეულია, თუ რატომ არ წარმოიქმნება დირაკის განტოლებაში ფარული სიმეტრია იზოტროპული ოსცილატორისათვის, რომლისთვისაც კლასიკურ მექანიკასა და არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში გვაქვს დამატებითი დინამიკური სიმეტრია. მიზეზია კლაინის პარადოქსის არსებობა დირაკის განტოლებაში.

ზ) კულონური პოტენციალის გამორჩეული როლი ზემოაღნიშნული სიმეტრიების პოზიციებიდან დასაბუთებულია ლორენც-სკალარისა და ლორენც-ვექტორის მე-4 კომპონენტების ნებისმიერი წრფივი კომბინაციისათვის – ორივე პოტენციალი უნდა იყოს კ უ ლ ო ნ უ რ ი.

თ) ალგებრულად ამოხსნილია სპექტრის ამოცანა და მიღებულია დირაკის განტოლების ამოუხსნელად ენერგეტიკული სპექტრი კომბინირებული კულონური ამოცანისთვის.

ი) დამტკიცებულია, რომ დირაკის K ოპერატორსა და ლიპმან ჯონსონის ოპერატორზე დამყარებული $S(2)$ სუპერალგებრა წარმოადგენს კულონური პოტენციალის წარმოშობის თეორიულ საფუძველს.

წინამდებარე გამოკვლევით სრულიად აღდგენილია ფარული სიმეტრიის სიმძლავრე (გამოყენების არეალი) მთელს ფიზიკაში. რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში გვაქვს იმდენივე დამატებითი სიმეტრია, რამდენიც არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკასა და კლასიკურ მექანიკაში. ეს სიმეტრია ყველგან ერთნაირი შედეგებით ვლინდება. მხედველობაში გვაქვს რამდენიმე გარემოება – სახელდობრ:

– ყველგან სიმეტრია რეგულარულად მიღებულია მხოლოდ და მხოლოდ კულონური პოტენციალისათვის.

– დამატებითი სიმეტრია ყველგან საშუალებას იძლევა ამოცანა ამოიხსნას წმინდა ალგებრულად მოძრაობის განტოლებების ამოხსნის გარეშე.

– დირაკის განტოლებაში გამოჩნდა ობიექტები, რომლების გარდაქმნასაც აწარმოებს დამატებითი სიმეტრიის გენერატორი, ესაა სპინური თავისუფლების ხარისხები. ეს ფაქტი გვაფიქრებინებს, რომ ამ სიმეტრიის წარმოშობის ბუნება არის სუპერსიმეტრიიდან. არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში და კლასიკურ მექანიკაში მჟღავნდება ამ სიმეტრიის ნარჩენი კვალი (რელიქტი).

დამატება I

ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორის კომუტატორი დირაკის ჰამილტონიანთან

პირველ რიგში ვისარგებლოთ დირაკის γ^5 მატრიცის თვისებებით (ანტიკომუტირებს კენტი რაოდენობის დირაკის γ_i მატრიცების ნამრავლთან და სათანადოდ, კომუტირებს ლუწი რაოდენობის γ_i მატრიცების ნამრავლთან)

რადგან:

$$\gamma^5\beta = -\beta\gamma^5 \text{ და } \vec{\Sigma}\gamma^5 = \gamma^5\vec{\Sigma}$$

ამიტომ

$$K\gamma^5 = -\gamma^5 K$$

ამის გათვალისწინებით γ^5 მატრიცა მივიყვანოთ სულ მარცხნივ და A ოპერატორი წარმოვადგინოთ ასე:

$$A = \gamma^5 B, \qquad (\text{დI.1})$$

სადაც

$$B \equiv \vec{\alpha}\hat{\vec{r}} + \frac{i}{Z\alpha m}K(H - \beta m) \qquad (\text{დ.I..2})$$

ამრიგად, ვიწყებთ კომუტატორის გამოთვლას ეტაპობრივად:

$$[A,H] = [\gamma^5 B, H] = \gamma^5[B,H] + [\gamma^5, H]B$$

გამოვთვალოთ აქ წარმოქმნილი კომუტატორები

ა) $[\gamma^5, H] = \gamma^5(\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m - \frac{a}{r}) - (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m - \frac{a}{r})\gamma^5 = (\gamma^5$ კომუტირებს $\vec{\alpha}$-თან, და ანტიკომუტირებს β-თან) $= 2m\gamma^5\beta$

ბ) ახლა გამოვთვალოთ

$$[B,H] = [\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}} + \frac{i}{ma}K(H - \beta m), H] = [\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}, H] + \frac{i}{ma}[K(H - \beta m), H], \qquad (\text{დ.I.3})$$

გამოვთვალოთ ცალკეული მათგანი

$$[\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}, H] = \alpha_i[\hat{r}_i, H] + [\alpha_i, H]\hat{r}_i$$

ახლა

$$[\alpha_i, H] = 2i\varepsilon_{ijk}p_j\Sigma_k - 2m\beta\alpha_i$$

ამიტომ

$$[\alpha_i, H]\hat{\vec{r}}_i = 2i\varepsilon_{ijk} p_j \sum_k \hat{r}_i - 2m\beta(\vec{\alpha}\hat{\vec{r}})$$

ასევე

$$[\hat{r}_i, H] = [\frac{r_i}{r}, H] = \frac{1}{r}[r_i, H] + [\frac{1}{r}, H]r_i = \frac{1}{r}[r_i, \vec{\alpha}\vec{p}]r_i + [\frac{1}{r}, \vec{\alpha}\vec{p}]r_i .$$

ცხადია

$$\frac{1}{r}[r_i, \vec{\alpha}\vec{p}] = \frac{1}{r}[r_i, \alpha_j p_j] = \frac{1}{r}\alpha_j[r_i, p_j] = \frac{1}{r}\alpha_j i\delta_{ij} = i\frac{\alpha_i}{r} ,$$

ხოლო

$$\left[\frac{1}{r}, \vec{\alpha}\vec{p}\right]r_i = \left[\frac{1}{r}, \alpha_j p_j\right]r_i = \alpha_j\left(\frac{-ir_j}{r^3} r_i\right) = -i\frac{(\vec{\alpha}\vec{r})}{r^3} r_i .$$

აქ გამოვიყენეთ იმპულსის ოპერატორის ცნობილი თვისება

$$[f(r), p_j] = i\frac{r_j}{r} f'(r)$$

ამიტომ მივიღეთ

$$\alpha_i\left[\frac{1}{r}, \vec{\alpha}\vec{p}\right]r_i = -i\frac{(\vec{\alpha}\vec{r})(\vec{\alpha}\vec{r})}{r^3} = -i\frac{r^2}{r^3} = -\frac{i}{r}$$

ხოლო მთლიანად

$$[\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}, H] = i\frac{\vec{\alpha}^2}{r} - \frac{i}{r} + 2i\varepsilon_{ijk} p_j \sum_k \hat{r}_i - 2m\beta(\vec{\alpha}\hat{\vec{r}})$$

ანუ (რაკი $\vec{\alpha}^2 = 3$) (დ.I.4)

$$[\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}, H] = \frac{2i}{r} + 2i\varepsilon_{ijk} p_j \sum_k \hat{r}_i - 2m\beta(\vec{\alpha}\vec{r}) \qquad \text{(დI.5)}$$

გარდა ამისა, (III.2.3) ფორმულაში გვჭირდება

$$[K(H - \beta m), H] = -2mK\beta(\vec{\alpha}\vec{p})$$

ამიტომ საძიებელი კომუტატორისათვის მიიღება

$$[B, H] = \frac{2i}{r} - 2m\beta(\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}) - 2i(\vec{\Sigma}\cdot[\vec{p}\times\hat{\vec{r}}]) - \frac{2i}{a}K\beta(\vec{\alpha}\vec{p})$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარეში მე-3 წევრი ასე უნდა გავიგოთ:

$$-2i(\vec{\Sigma}\cdot[\vec{p}\times\hat{\vec{r}}]) = 2i\varepsilon_{ijk}\, p_j \sum_k \hat{r}_i = 2i\varepsilon_{ijk}\, p_j \sum_k p_j r_i \left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= 2i\varepsilon_{kij} \sum_k (r_i p_j - i\delta_{ij})\left(\frac{1}{r}\right) = 2i\varepsilon_{kij} \sum_k l_k \left(\frac{1}{r}\right) = 2i\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}\left(\frac{1}{r}\right)$$

ასე, რომ

$$[B,H] = \frac{2i}{r} + 2i(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})\left(\frac{1}{r}\right) - 2m\beta(\vec{\alpha}\,\hat{\vec{r}}) - \frac{2i}{a}K\beta(\vec{\alpha}\vec{p}) \qquad (\text{დI.6})$$

ახლა გვჭირდება დავუბრუნდეთ თავდაპირველ კომუტატორს:

$$[A,H] = [\gamma^5, H]B + \gamma^5[B,H] = \gamma^5\left\{2m\beta B - 2m\beta(\vec{\alpha}\,\hat{\vec{r}}) + \frac{2i}{r} + 2i\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{2i}{a}K\beta(\vec{\alpha}\,\vec{p})\right\} =$$

$$= \gamma^5\left\{2m\beta(B - \vec{\alpha}\,\hat{\vec{r}}) + \frac{2i}{r} + 2i\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{2i}{a}K\beta(\vec{\alpha}\,\vec{p})\right\}$$

თუ B-ს განმარტებას გამოვიყენებთ, პირველ ფრჩხილში მოთავსებული გამოსახულება არის

$$\frac{i}{ma}K(H - \beta m) = \frac{i}{ma}K(\vec{\alpha}\vec{p} - \frac{a}{r})$$

აქედან შემოდის თამაშში კულონური პოტენციალი. ამ გამოსახულებიდან წამოსული $(\vec{\alpha}\vec{p})$-ს შემცველი გამოსახულება $\beta K = K\beta$ თვისების გამო შეიკვეცება წინა გამოსახულების სულ ბოლო წევრთან და დაგვრჩება:

$$[A,\gamma^5] = \gamma^5\left\{-\frac{2i}{a}\beta K\frac{a}{r} + \frac{2i}{r} + 2i\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}\,\frac{1}{r}\right\}$$

იმის გამო, რომ $\vec{l}$-თან კომუტირებს r-ის ნებისმიერი ფუნქცია ($\vec{l}$-ის მიმართ სკალარი) $[\vec{l}, f(r)] = 0$, ბოლო წევრში $\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}$ გადაისმება $\frac{1}{r}$-თან და შედეგი დაჯგუფდება წინა წევრთან

$$\frac{2i}{r} + 2i\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}\,\frac{1}{r} = \frac{2i}{r}(1 + \vec{\Sigma}\cdot\vec{l}) = \frac{2i}{r}\beta K$$

ეს უკანასკნელი კი ზუსტად იკვეცება ფრჩხილებში მოთავსებულ პირველ წევრთან. ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ a-ს შეკვეცა მარტო კულონური პოტენციალისათვის ხდება.

საბოლოოდ ვასკვნით, რომ

$$[A,H]=0$$

ამრიგად, **ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორი კიდევ ერთი დამატებითი შენახვადი სიდიდე ყოფილა დირაკის განტოლებისათვის გარეშე კულონურ ველში.** მისი არსებობა პირდაპირაა დაკავშირებული დონეების ორჯერად გადაგვარებასთან დირაკის K ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობების ორი ნიშნის გამო.

დამატება II
ლიპმან-ჯონსონის ოპერატორის კვადრატი

როგორც ვნახეთ, A არის კენტი ოპერატორი K-ს მიმართ. ამიტომ თუ A-ს გავაიგივებთ ერთ-ერთ სუპერმუხტთან, ვიტენის სუპერსიმეტრიული ჰამილტონიანის ასაგებად გვჭირდება A^2-ის გამოთვლა. შევუდგეთ ამ გამოთვლასაც.

რადგან

$$A=\gamma^5 B, \quad \text{ამიტომ}$$

$$A^2=\gamma^5 B\gamma^5 B=\tilde{B}B$$

სადაც $\tilde{B}=\gamma^5 B\gamma^5$ არის ოპერატორის γ^5 გარდაქმნა.

აშკარაა, რომ

$$\tilde{B}=\gamma^5\left\{\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}+\frac{i}{ma}K(H-\beta m)\right\}\gamma^5=$$

$$=\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}-\frac{i}{ma}K(H-\beta m)$$

ამიტომ

$$\tilde{B}B=\left\{\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}-\frac{i}{ma}K(H-\beta m)\right\}\cdot\left\{\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}+\frac{i}{ma}K(H-\beta m\right\}=$$

$$=1+\frac{i}{ma}\left\{\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}\,K(H-\beta m)-K(H-\beta m)\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}\right\}+ \qquad (\text{დII.1})$$

$$+\frac{1}{(ma)^2}[K(H-\beta m)K(H-\beta m)]$$

გამოვთვალოთ პირველი ფრჩხილი

$$\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}\,K(H-\beta m)-K(H-\beta m)\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}=$$
$$=[\vec{\alpha}\hat{\vec{r}},KH]+m[K\beta,\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}]=$$
$$=K[\vec{\alpha}\hat{\vec{r}},H]+mK[\beta,\vec{\alpha}\hat{\vec{r}}]$$

აქ შემავალი პირველი კომუტატორი ადრე გამოთვლილი გვაქვს. მისი გამოყენებით მიიღება:

$$K[\frac{2i}{r}+2i\varepsilon_{ijk}\sum_k p_j\hat{\vec{r}}_i-2mK(\vec{\alpha}\hat{\vec{r}})+2mK(\vec{\alpha}\hat{\vec{r}})]$$

რადგან

$$p_j\,\hat{r}_i=-i\frac{\hat{r}^2\delta_{ij}-r_ir_j}{r^3}+\hat{r}_i\,p_j$$

პირველი წევრი ამოვარდება ანტისიმეტრიულ სტრუქტურაზე გამრავლების გამო. ამიტომ ε_{ijk}-ს შემცველი წევრიდან დაგვრჩება

$$\varepsilon_{ijk}\sum_K\hat{r}_i\,p_j=\frac{1}{r}\vec{\Sigma}\cdot\vec{l}$$

სულ საძიებელი გამოსახულება ტოლი იქნება

$$K[\frac{2i}{r}+\frac{2i}{r}(\vec{\Sigma}\cdot\vec{l})]=K^2\beta\frac{2i}{r}$$

ეს გამოსახულება საწყისი ფორმულის ძალით მრავლდება ფაქტორზე $\frac{i}{ma}$. ამიტომ აქ სულ მიიღება

$$-\frac{2}{mar}K^2\beta \qquad \text{(დII.2)}$$

ახლა გამოვთვალოთ $\tilde{B}B$-ს ბოლო წევრი:

$$\frac{1}{(ma)^2}[K(H-\beta m)K(H-\beta m)=\frac{1}{(ma)^2}\left\{K^2H^2-m(KHK\beta+K\beta KH)+m^2K^2\right\}=$$
$$=\frac{1}{(ma)^2}\left\{K^2H^2-mK^2(H\beta+\beta H)+m^2K^2\right\}=\frac{1}{(ma)^2}K^2\left\{H^2+m^2-m(H\beta+\beta H)\right\}$$

თავის მხრივ

$$H\beta+\beta H=\left\{H_1\beta\right\}=2m-2\beta\frac{a}{r}$$

ამიტომ წინა გამოსახულება იღებს სახეს

$$= \frac{1}{(ma)^2} K^2 \left\{ H^2 + m^2 - 2m^2 + 2m\beta \frac{a}{r} \right\} = \frac{K^2}{a^2} \left\{ \frac{H^2}{m^2} - 1 + \frac{2a}{mr} \beta \right\} =$$

$$= \frac{K^2}{a^2} (\frac{H^2}{m^2} - 1) + 2K^2 \beta \frac{1}{mar}$$

როგორც ვხედავთ, ბოლო წევრი ზუსტად ბათილდება ადრე მიღებულ (დII.2) წევრთან და ამიტომ გვაქვს შემდეგი ფორმულა A^2-ისთვის:

$$A^2 = 1 + (\frac{K}{Z\alpha})^2 (\frac{H^2}{m^2} - 1) \qquad \text{(დII.3)}$$

ეს მნიშვნელოვანი თანაფარდობა ძირითად ტექსტში გამოყენებული გვაქვს წყალბადის ატომის სპექტრის აღსაწერად სუპერსიმეტრიის საფუძველზე.

ზოგიერთი სასარგებლო კომუტაციის თანაფარდობის გამოყვანა

1. **გამოვთვალოთ კომუტატორი** $\left[\vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{r}}, H\right]$.

ამოხსნა: გვაქვს

$$\left[\vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{r}}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + V(r)\right] = \left[\vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{r}}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}\right] = \Sigma_i \left[\frac{r_i}{r}, \alpha_j p_j\right] + \left[\Sigma_i, \alpha_j p_j\right] \frac{r_i}{r}.$$

გამოვთვალოთ ცალკეული წევრები

$$\Sigma_i \left[\frac{r_i}{r}, \alpha_j p_j\right] = \Sigma_i \frac{1}{r} \left[r_i, \alpha_j p_j\right] + \Sigma_i \left[\frac{1}{r}, \alpha_j p_j\right] r_i$$

$$= \frac{\Sigma_i \alpha_j}{r} \left[r_i, p_j\right] + \Sigma_i \alpha_j \left[\frac{1}{r}, p_j\right] r_i = \frac{i}{r} \vec{\Sigma} \cdot \vec{\alpha} - i \vec{\Sigma} \cdot \vec{r} \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$= \frac{3i}{r} \gamma^5 - \frac{i}{r} \gamma^5 = \frac{2i}{r} \gamma^5$$

$$\left[\Sigma_i, \alpha_j p_j\right] \frac{r_i}{r} = 2\varepsilon_{ijk} \alpha_k p_j r_i \left(\frac{1}{r}\right) = 2i\varepsilon_{ijk} \alpha_k \left(r_i p_j - i\delta_{ij}\right) \frac{1}{r}$$

$$= 2i\alpha_k l_k \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2i}{r} \gamma^5 \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{l}\right)$$

თუ ამათ ერთად დავაჯგუფებთ, მიიღება

$$\left[\vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{r}}, H\right] = \frac{2i}{r} \gamma^5 + \frac{2i}{r} \gamma^5 \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{l}\right) = \frac{2i}{r} \gamma^5 \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{l} + 1\right) = \frac{2i}{r} \gamma^5 \beta K$$

2.გამოვთვალოთ კომუტატორი $\left[K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right),H\right]$.

ამოხსნა:

$$\begin{aligned}\left[K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right),H\right] &= K\left[\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right),H\right]+\left[K,H\right]\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right)\\ &= K\left[\vec{\Sigma}\cdot\vec{p},\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m+V(r)\right]\\ &= K\left\{\left[\vec{\Sigma}\cdot\vec{p},\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right]+m\left[\vec{\Sigma}\cdot\vec{p},\beta\right]+\left[\vec{\Sigma}\cdot\vec{p},V(r)\right]\right\}.\end{aligned}$$

აქ ცალკეული კომუტატორებია

$$\begin{aligned}&\left[\vec{\Sigma}\cdot\vec{p},\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right]=\left[\Sigma_i,\alpha_j\right]p_i p_j=2i\varepsilon_{ijk}\alpha_k p_i p_j=0\\ &\left[\vec{\Sigma}\cdot\vec{p},\beta\right]=0\\ &\left[\vec{\Sigma}\cdot\vec{p},V(r)\right]=\Sigma_i\left[p_i,V(r)\right]=-i\Sigma_i\frac{r_i}{r}V'(r)=-i\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right)V'(r).\end{aligned}$$

კულონური პოტენციალისათვის $V(r)=-\dfrac{a}{r}$, და ამიტომ $V'(r)=a/r^2$ ანუ გვაქვს

$$\left[K\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right),H\right]=-\frac{ia}{r^2}K\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right).$$

3. გამოვთვალოთ კომუტატორი $\left[K\gamma^5 f(r),H\right]$.

ამოხსნა:

$$\begin{aligned}\left[K\gamma^5 f(r),H\right] &= K\left[\gamma^5 f(r),H\right]+\left[K,H\right]\gamma^5 f(r)=K\gamma^5\left[f(r),H\right]+K\left[\gamma^5,H\right]f(r)\\ &= K\gamma^5\left[f(r),\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right]+K\cdot 2m\gamma^5\beta f(r)=K\gamma^5 i\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{r}}f'(r)+2mK\gamma^5\beta f(r)\\ &= iK\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\right)f'(r)+2mK\gamma^5\beta f(r).\end{aligned}$$

მიღებული თანაფარდობები გამოყენებულია ძირითად ტექსტში დამატებითი სიმეტრიის ოპერატორის გამოსაყვანად.

ლიტერატურა - ЛИТЕРАТУРА – REFERENCES

1. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.,** Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.
Kaku M., Quantum Field Theory, a Modern Introduction. Oxford Univ. Press, 1993.

2. **Голдстейн Г**., Классическая Механикаб изд. 2-ое, М.,1975.
Goldstein H. Poole C and Saiko J., Classical Mechanics, 3 rd Ed. Pearson Education. Inc. 2002.
ა.ხელაშვილი, კლასიკური თეორიული მექანიკა, თსუ, 2005.

3. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М..** Механика, Наука, М., 1998.

4. **Tangerman R. and Tjon J.** "*Exact supersymmetry in the nonrelativistic hydrogen atom*" Phys. Rev., **A48**, 1089(1993).

5. **Biedenharn L.C. and Louk L.D**., *"Angular Momentum in Quantum Physics"* in "Encyclopedya of Mathematics and its Applications", Addison-Wisley Publ.Comp. 1981.

6. **T.T.Khachidze and A.A.Khelashvili,** "*An "Accidental" Symmetry Operator for the Dirac Equation in the Coulomb Potential*", **Modern Phys. Letters, A20**, 2277-2281 (2005).

7. **T.T.Khachidze and A.A.Khelashvili,** *"Hidden Symmetry Operator of the Kepler Problem in Relativistic Quantum Mechanics – from Pauli to Dirac"*, **Am. J. Phys.**, (in press 2006)
and Arxiv: physics/0508122 (2005).

8. **Johnson M.H. and Lippmann B.A**. "*Relativistic Kepler Problem"*, Phys. Rev.,**78**, 329(A),(1950).

9. **Dahl J.P. and Jorgensen T.,** *"On the Dirac-Kepler Problem: the Johnson-Lippmann Operator, Supersymmetry, and Normal-Mode Representations"*, Int. J. Quantum of Chemistry, **53**, 161-181 (1995).

10. **Stahlhofen A.A.,** *"Algebraic Solutions of Relativistic Coulomb Problems"*, Helv. Phys. Acta, **70**, 372-386 (1997).

11. **Katsura H. and Aoki H.,** *"Exact Supersymmetry in the Relativistic Hydrogen Atom in General Dimentions – supercharge and generalized Johnson-Lippmann Operator"*, Journ. Math. Physics, **47**, 032301 (2006).

12. **T.T.Khachidze and A.A.Khelashvili,** *"Supercharge Operator of Hidden Symmetry in the Dirac Equation*. Proc. of Cairo Int. Conf. on High Energy Physics, CICHEP II, 2006. and **Arxiv: hep-th/0602181 (2006).**

13. **Witten E.,** *"Spontaneous Symmetry Breaking in SUSY Quantum Mechanics"*, Nuclear Phys. **B188**, 513-560 (1981).

14. **Laplace M.** "*Traite de Mecanique Celeste"*, t.1, ch.3,Paris, Bachelier, 1829.

15. **Goldstein H.,“***Prehistory of the “Runge-Lenz”vector”*, Am.J.Phys., **43**, 737-738 (1975)

16. **Попов В.С**., О скрытой симметрии атома водорода. В сб. – Физика Высоких Энергий и Теория Элементарных Частиц. Наукова Думка, Киев, 1967. 702-727.

17. **Переломов А.М.,** Интегрируемые Системы Классической Механики и Алгебры Ли. Наука, М., 1990.

18. **Abelson H. di Sessa A. and Rudolph L**., *“Velocity Space and Geometry of Planetary Orbits”*, Am.J.Phys., 43, 579-589 (1975)

19. **Kaplan R.P**. *“Scattering Suppliment to “Velosity Space and Geometry of Planetary Orbits”*, Am.J.Phys., **46**, 854-856 (1978).

20. **Kaplan R.P**., *“Momentum Space Derivation of the Runge-Lenz Vector”,* Am.J.Phys., **49,**593-594 (1981).

21. **Bertrand J.,** C.R., **77**, 849 (1873).

22. **Fock V.A.,** *“Zur Theorie des Wasserstoffatoms”*, Z.f.Fizik, **98,** 145-154 (1935).

23. **Dahl J.D**., *“Physical Origin of the Runge-Lenz Vector”,* Journ.Phys., Math. Gen., **30,** 6831-6890 (1987).

24. **Darwin C.G**., Proc.Roy. Soc., **118**, 654 (1928).

25. **Фок В. А**., Теория Пространства, Времени и Тяготения, М., 1981.

26. **Pauli W**.Uber das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der Neuen Quantenmechanik.
Z. f. Fizik., **36,** 336-363 (1926).

27. **Bargman V**., Zur Theorie des Wasserstoffatoms”, Z. f. Fizik., **99**,168-188 (1936).

28. **Барут А. Ранчка Р.**Теория Представлений групп и ее приложения. Мир М.1980.

29. **Генденштейн Л.Э. Криве.** Суперсимметрия в квантовой механике. УФН,**146**,вып. 4..553-576 (1985).

30. **Гольфанд Ю.Ф., Лихтман Е.П.,** Письма в ЖЭТФ, **13,** 452-456 (1971).

31. **Волков Д.В.. Акулов В.П.,** Письма в ЖЭТФ, **16,** 621 (1972): Phys. Lett. **B46,** 109 (1973).

32. **Wess J., Zumino B.,** *“Supergauge transformations in four dimensions”*Nucl. Phys., **B70**, 39-50 (1974).

33. **გ. ჭილაშვილი,** “რელატივისტური მექანიკა”, თბილისი, 1997.

34. **Sommerfeld A.,** *"Atombau and spectralinien",* (Vieweg, Braunschweig,1929),II, 209ff.

35. **Yoshida T**., *"Considerations on the Precessing Orbit via a Rotating Laplace-Runge-Lenz Vector",* Am.J.Phys., **55**,1133-1136 (1987).

36. **Johnson M.H., and Lippmann B.A.,** *"Relativistic Kepler Problem",* Phys. Rev., **78**,329(A), 1950.

37. **Dirac P.A.M.,** *"The Principles of Quantum Mechanics",* 4th Ed. (Oxford Univ. Press, London,1958). Ch.11.

38. **Biedenharn L.C.,** *"Remarks on the Relativistic Kepler Problem",* Phys.Rev., **126,** 845-851 (1962).

39. **Bohm A.** *"Quantum Mechanics. Fundations and Applications",* (Springer-Verlag, New York, 1986), pp. 255-275.

40. T**.T.Khachidze and A.A.Khelashvili,** *"Manifestations the Hidden Symmetry of Coulomb Problem in the Relativistic Quantum Mechanics – from Pauli to Dirac Electron",* Bull. of Georgian Acad. Sci., **172**, 452- 455 (2005); and ArXiv: **quant-ph/0507257.**

41. **თ.ხაჩიძე,** *"კულონური პოტენციალის "ფარული" სიმეტრიის გამოვლინებანი რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში",* კრებულში " და იყო დღე ფიზიკისა" , გვ. 138-141, თბილისი, 2005.

42. **Sakurai J.J.,** *"Advanced Quantum Mechanics",* (Addison-Wesley, MA,1967), Ch. 3.

43. **H.Ui,** *''Supersimmetrik Quantum Mechaniks and Fermion in a Gauge Field of (1+2) -Dimension",* Prog. Tteor.Physics, **72**, 192-193 (1984).

44. **V.V. Semenov,** *"Supersymmetry and the Dirac Equation of a Neutral Particle with an Anomalous Magnetic Moment in a Central Electrostatic Field'',* J.Phys.A:Math. Gen. **23**, L721-724 (1990).

45. **M .S Plyushchay,** *"On the Nature of Fermion Monopole Supersymnerty",* Phys. Lett.,**B485**, 187- 192 (2000).

46. **F.De Jonghe et al.,** *"Nev Supersymmetry of the Monopole",* Phys. Lett.**B359,** 114 (1995);
P.A.Horvathy, et al., *"Monopole Supersymmetries"* Phys. Lett.**B486,** 346-352 (2000).

47. **Joseph L.McCauley,** *"Classical Mechanics – Transformations, Flows, Integrable and Chaotic Dynamics'',* (Cambridge Univ. Press, 1997).

48. **А.А. Хелашвили,** *Релятивистские Уравнения в Случае Бесконечно Растущих Потенциалов,* Сообщ. АН ГССР, 104, 569 – 572 (1981).

49. **R.P. Martinez-y-Romero et al.,** *'' Relativistic Quantum Mechanics of a Dirac Oscilator",* Eur. J.Phys., **16,** 135 – 141 (1995) and Arxiv: quant – ph/990869 (1999).

50. **O.Klein,** Z fur Fizik, **53,** 157 (1929).

51. **T.T. Khachidze and T. P. Nadareishvili,** "Dirac Equation and its Squaered Form", **Bull. Of Georg. Acad.Sci., 174,** 61-64 (2006), and ArXiv**: hep-th/0606043.**

52. **Khachidze T.T. and Khelashvili A.A., Ukr. Fiz. Zhurnal (UFZ), 52 , N5** 421-423 (2007);

53. **Leviatan A.** Phys.Rev. lett. **92,** 202501 (2004);

54. **Foldi L. and Wouthuysen S.** Phys.Rev. 72, 29 (1950);

55. **Greiner W., Muler B. and Rafelski J.** Quantum Eleqtrodynamics of Strong Fields. Springer-Verlag, (1985).